Forme indeterminate II
Approfondimento 1

Daniela Valenti, 2021

A. Forme indeterminate del tipo $\infty - \infty$ che sono differenze di funzioni irrazionali

Nozioni da applicare nei calcoli

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=a-b \Rightarrow \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \text{ con } a>0 \text{ e } b>0$$

$$\left(\sqrt{a}-b\right)\cdot\left(\sqrt{a}+b\right)=a-b^2 \Rightarrow \left(\sqrt{a}-b\right)=\frac{a-b^2}{\sqrt{a}+b} \text{ con } a>0$$

Esempi di calcoli svolti

ESEMPIO 1

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\overset{+\infty}{\boxed{\sqrt{x+1}}}-\overset{+\infty}{\boxed{\sqrt{x}}}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}}{\underset{+\infty}{\boxed{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}}}=0$$

$$\boxed{\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}$$

Esempi di calcoli svolti

ESEMPIO 2

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\boxed{\sqrt{x^2+4}}}_{\to+\infty}-\underbrace{\boxed{x}}_{\to+\infty}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}^2+4-\cancel{x}^2}{\underbrace{\boxed{\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)}}_{\to+\infty}}=0$$

$$\boxed{\left(\sqrt{a}-b\right)=\frac{a-b^2}{\sqrt{a}+b}}$$

B. Forme indeterminate del tipo ∞/∞ che sono quozienti di funzioni irrazionali

Nozioni da applicare nei calcoli

$\sqrt{a}$ esiste solo se $a \geq 0$

$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$, con $a \geq 0$

$\dfrac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$, con $a > 0$

$\dfrac{\sqrt{a}}{a} = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$, con $a > 0$

$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, con $a \geq 0$

$\sqrt{a^2} = |a|$ per qualunque a reale

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ se } a \geq 0 \\ -a, \text{ se } a < 0 \end{cases}$$

$$\frac{|a|}{a} = \begin{cases} 1, \text{ se } a > 0 \\ -1, \text{ se } a < 0 \end{cases}$$

Esempi di calcoli svolti

ESEMPIO 3

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\boxed{\sqrt{2x^2+3}}^{\,\to+\infty}}{\boxed{x}_{\,\to+\infty}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2+3}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(2+\dfrac{3}{x^2}\right)}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{2+\dfrac{3}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\overbrace{\boxed{\frac{|x|}{x}}}^{1}\cdot\sqrt{2+\underbrace{\boxed{\frac{3}{x^2}}}_{0}}=\sqrt{2}$$

Raccolgo la potenza di x con esponente massimo

x tende a $+\infty$ perciò, nel calcolo del limite, ho $x>0$

Daniela Valenti, 2021

Esempi di calcoli svolti

ESEMPIO 4

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\overset{+\infty}{\boxed{\sqrt{2x^2+3}}}}{\underset{-\infty}{\boxed{x}}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\overset{+\infty}{\boxed{\sqrt{2x^2+3}}}}{\underset{-\infty}{\boxed{x}}}=\lim_{x\to-\infty}\overset{-1}{\boxed{\frac{|x|}{x}}}\cdot\sqrt{2+\underset{0}{\boxed{\frac{3}{x^2}}}}=-\sqrt{2}$$

Raccolgo la potenza di x con esponente massimo

x tende a -∞ perciò, nel calcolo del limite, ho $x<0$

Esempi di calcoli svolti

ESEMPI 4 e 5

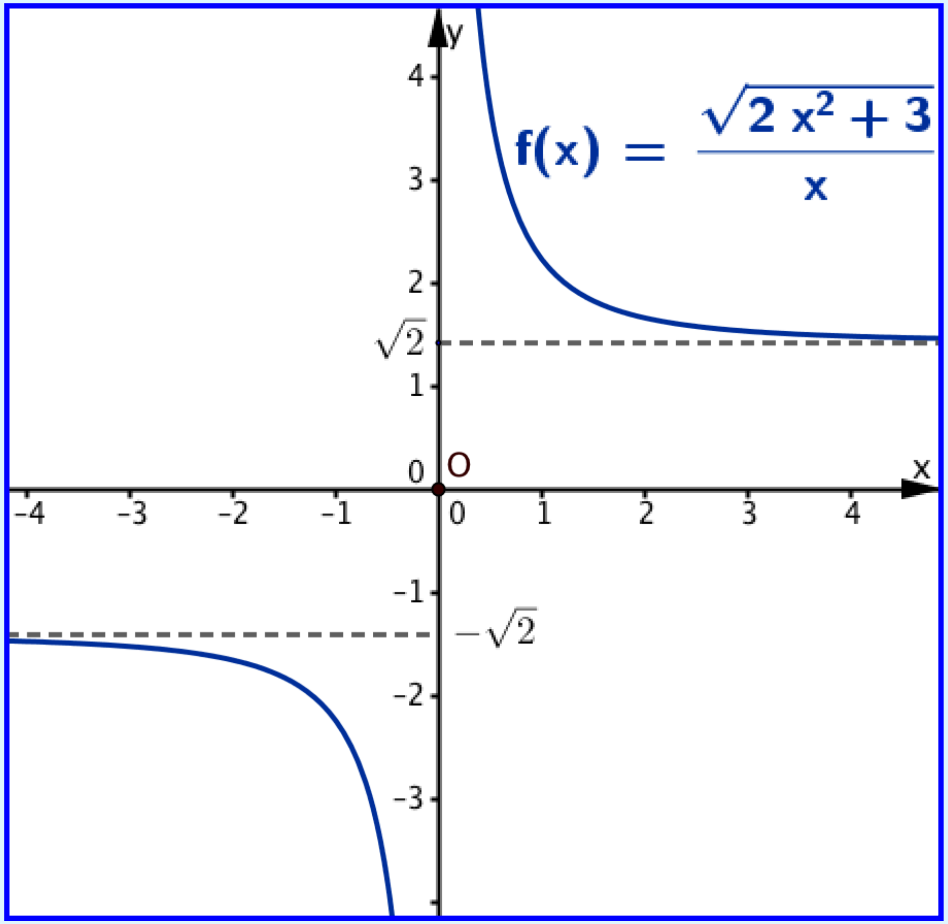
In conclusione ho ottenuto

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{2x^2+3}}{x} = \sqrt{2}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{2x^2+3}}{x} = -\sqrt{2}$$

E quindi

$$\text{Non esiste} \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{2x^2+3}}{x}$$



Daniela Valenti, 2021

C. Collegamento fra forme $\infty - \infty$ e ∞/∞ con funzioni irrazionali

Esempi di calcoli svolti

$$\boxed{\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}$$

Esempio 6

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\boxed{\sqrt{4x+5}}^{\,+\infty}-\boxed{\sqrt{x}}^{\,+\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x+5-x}{\sqrt{4x+5}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\overset{+\infty}{\boxed{3x+5}}}{\underset{+\infty}{\boxed{\sqrt{4x+5}+\sqrt{x}}}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+5}{\sqrt{4x+5}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(3+\frac{5}{x}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{4+\frac{5}{x}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\overset{+\infty}{\boxed{\sqrt{x}}}\underset{1}{\left(\frac{3+\overset{0}{\boxed{\frac{5}{x}}}}{\sqrt{4+\underset{0}{\boxed{\frac{5}{x}}}}+1}\right)}=+\infty$$

Raccolgo la potenza di x con esponente massimo

Esempi di calcoli svolti

Esempio 7

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\boxed{\sqrt{x^2+4x+3}}}_{+\infty}-\underbrace{\boxed{x}}_{+\infty}\right)$$

$$\left(\sqrt{a}-b\right)=\frac{a-b^2}{\sqrt{a}+b}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+3}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+\overbrace{\boxed{4x+3}}^{+\infty}-\cancel{x^2}}{\underbrace{\boxed{\sqrt{x^2+4x+3}+x}}_{+\infty}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(4+\overbrace{\boxed{\frac{3}{x}}}^{0}\right)}{x\left(\sqrt{1+\underbrace{\boxed{\frac{4}{x}}}_{0}+\underbrace{\boxed{\frac{3}{x^2}}}_{0}}+1\right)}=\frac{4}{2}=2$$

Raccolgo la potenza di x con esponente massimo

x tende a $+\infty$ perciò, nel calcolo del limite, ho: $x>0$ e quindi $|x|=x$

Forme indeterminate con funzioni irrazionali

Sono limiti impegnativi nei calcoli con carta e penna, non solo quando sono basati sulle proprietà algebriche illustrate in questo approfondimento, ma anche quando sono basati sulle derivate.