Pagine tratte dal testo fuori catalogo
E. Castelnuovo, C. Gori Giorgi, D. Valenti
Elementi di analisi matematica

Limite per x che tende ad un numero finito: definizioni

Verranno qui precisate le nozioni grafico - intuitive esposte nella presentazione e si arriverà a definizioni rigorose analoghe a quelle viste nella lezione precedente. Il lavoro sarà diviso in tre parti:

A) i limiti infiniti,
B) i limti finiti,
C) le nozioni di limite destro e limite sinistro.

A) Limiti infiniti

Cominciamo col fissare l'attenzione sulla funzione

$$y=\frac{1}{x^2},$$

rappresentata in figura 42: quando x assume valori sempre più vicini a 0, y assume valori positivi sempre più grandi; il corrispondente grafico presenta due rami che sembrano avvicinarsi sempre di più alla retta d'equazione $x=0$. Ma tabella e figura non bastano per assicurarci che veramente y cresca indefinitamente. Potrebbe infatti presentarsi la situazione di fig. 43: la curva presenta due rami che si avvicinano sempre di più al punto $A(0, 100)$.

x	$y=\frac{1}{x^2}$
⋮	⋮
−0,1	100
−0,01	10000
0	non esiste
0,01	10000
0,1	100

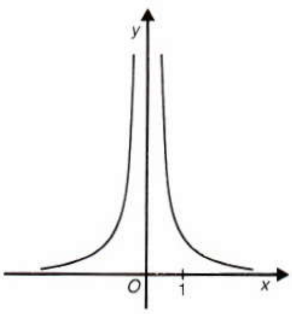

Fig. 42

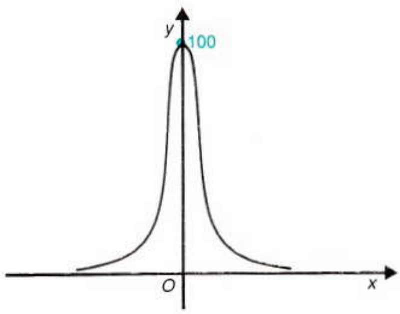

Fig. 43

Per capire che quest'ultima situazione non può verificarsi, si può ragionare così: per la funzione data, risulta

$$\frac{1}{x^2}=100, \quad \text{per} \quad x=0,1 \quad \text{e} \quad x=-0,1$$

Si osserva poi che y supera il valore 100, purché si sostituiscano ad x valori compresi fra $-0{,}1$ e $0{,}1$, escludendo 0 (fig. 44).
Per descrivere meglio questa situazione si introduce la nozione di **intorno** (fig. 45): l'insieme di tutti i numeri reali x che soddisfano la disuguaglianza

$$-0{,}1<x<0{,}1$$

si chiama **intorno di 0** e si indica con $\boldsymbol{I(0)}$. Il valore 0,1 si chiama **raggio dell'intorno** e, se si vuole indicarlo esplicitamente, si scrive $I(0;\ 0{,}1)$.

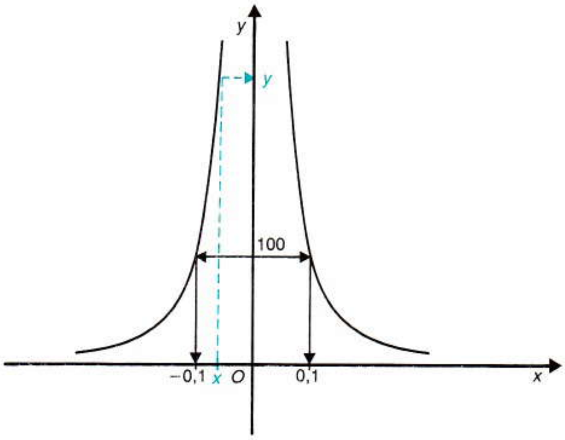

Fig. 44

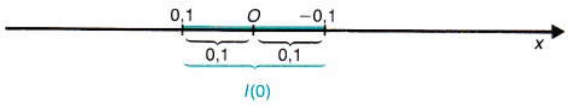

Fig. 45

Si trova così che risulta:

$y>10^2$ purché si scelga x nell'intorno $I(0;\ 0{,}1)$,
$y>10^4$ purché si scelga x nell'intorno $I(0;\ 0{,}01)$,
...

Rivediamo attentamente il ragionamento seguito.
- Si è ipotizzata l'esistenza di un valore massimo M per la y; per esempio si è scelto

  $M=10^2,\ M=10^4,\ \ldots$
- Fissato M, si è trovato l'intorno di 0 nel quale si deve scegliere x in modo che y superi M; per esempio

  fissato $M=10^2$, si trova $I(0;\ 0{,}1)$,
  fissato $M=10^4$, si trova $I(0;\ 0{,}01)$.

È chiaro che il raggio dell'intorno dipende dalla scelta di M e perciò viene indicato convenzionalmente con δ_M[1].

Ora, questo ragionamento si può sempre ripetere quando il grafico di una funzione presenti due rami che sembrano avvicinarsi sempre di più ad una retta d'equazione $x=a$ (fig. 46). Si arriva così alla definizione rigorosa di limite, che si esprime nel modo seguente (fig. 47):

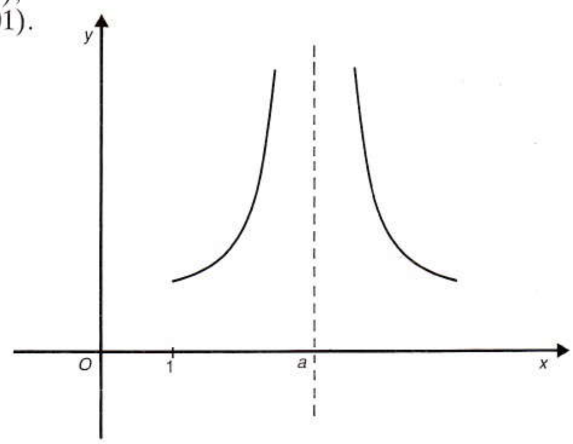

Fig. 46

[1] La lettera δ (che si legge "delta") fa parte dell'alfabeto greco e corrisponde alla "d" italiana.

data una funzione $y=f(x)$, si scrive

$$\lim_{x\to a} y=+\infty \qquad \text{ossia} \qquad \lim_{x\to a} f(x)=+\infty,$$

se si verifica la seguente condizione: comunque si sceglie un numero M, positivo e grande a piacere, si può sempre trovare un intorno $I(a,\ \delta_M)$, tale che risulti

$$y>M, \text{ quando si sceglie } x \text{ in } I(a,\ \delta_M).$$

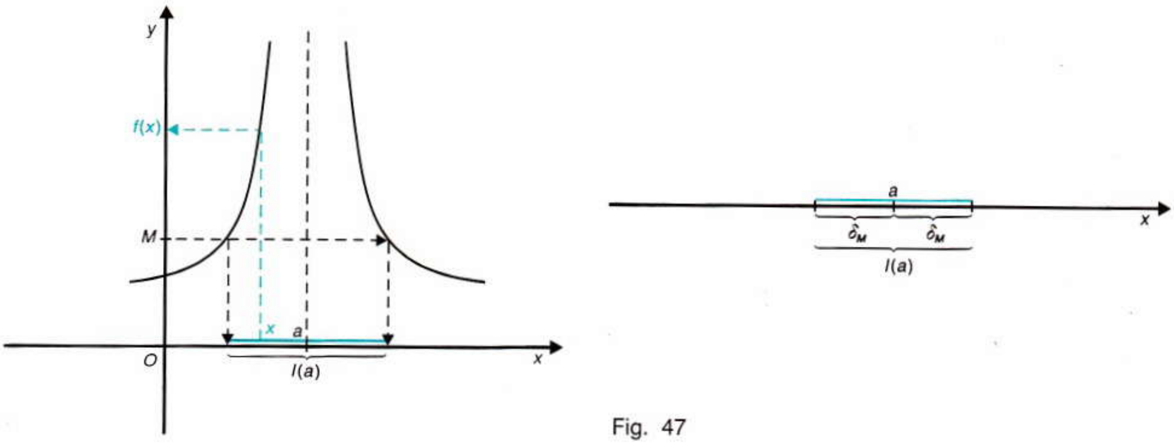

Fig. 47

Basta ora valersi di una simmetria rispetto all'asse delle x (fig. 48) per dire che risulta

$$\lim_{x\to a} y=-\infty, \qquad \text{ossia} \qquad \lim_{x\to a} f(x)=-\infty,$$

se si verifica la seguente condizione:
scelto comunque un numero M, positivo e grande a piacere, si può sempre trovare un intorno $I(a,\ \delta_M)$, tale che risulti

$$y<-M, \text{ quando si sceglie } x \text{ in } I(a,\ \delta_M).$$

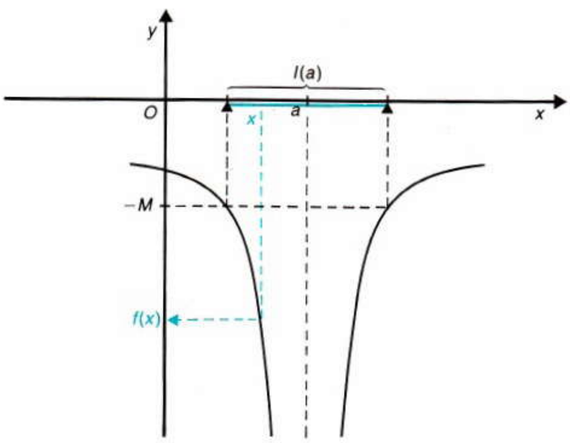

Fig. 48

B) Limiti finiti

Vogliamo ora precisare con una definizione il comportamento di una funzione come quella che è espressa da

$$y=\frac{(x-2)^3}{x-2}$$

ed è rappresentata in fig. 49.

x	y
1,5	0,25
1,9	0,01
1,99	0,0001
2	non esiste
2,01	0,0001
2,1	0,01
2,5	0,25

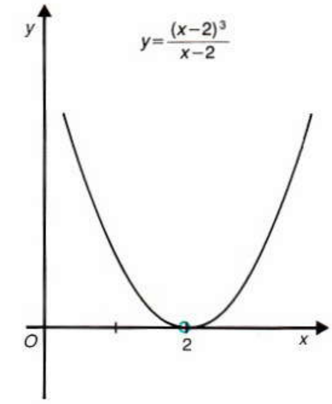

Fig. 49

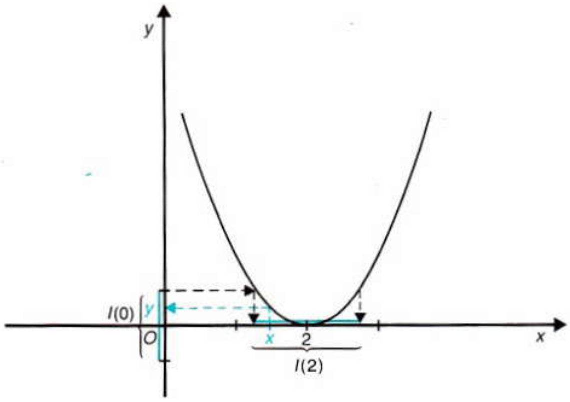

Fig. 50

L'idea suggerita dalla figura è che "si può rendere y vicina a 0 quanto si vuole, purché si scelga x sufficientemente vicino a 2".

Quest'idea può essere formalizzata, basandosi sulla nozione di intorno; vediamo la linea che si segue, considerando la fig. 50:

- si fissa "quanto y deve essere vicina a 0", indicando un intorno di 0; per esempio, se y non deve differire da 0 più di 0,25, si fissa $I(0;\ 0{,}25)$.
- successivamente si calcola per quali valori di x si ottengono valori di y appartenenti ad $I(0;\ 0{,}25)$; si trova che questi valori formano l'intorno di 2 indicato con $I(2;\ 0{,}5)$.

E così, se si vuole che y cada in $I(0;\ 0{,}01)$, si sceglie x in $I(2;\ 0{,}1)$...

Si può dunque dire che il simbolo

$$\lim_{x\to 2} y=0.$$

significa che, fissato comunque un intorno $I(0)$, si può trovare un intorno $I(2)$ tale che y appartiene a $I(0)$ quando si sceglie x in $I(2)$.

Si arriva così alla seguente **definizione di limite** (fig. 51):

data una funzione $y=f(x)$, il simbolo

$$\lim_{x\to a} y=\ell, \qquad \text{ossia} \qquad \lim_{x\to a} f(x)=\ell,$$

significa che, fissato comunque un intorno $I(\ell)$, si può trovare un intorno $I(a)$ tale che y appartiene sempre ad $I(\ell)$, quando si sceglie x in $I(a)$.

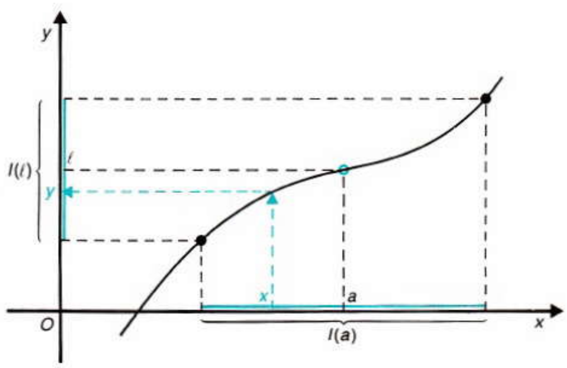

Fig. 51

Si osserva subito che in questa definizione non si è esplicitamente indicato né il raggio di $I(\ell)$, né il raggio di $I(a)$. Quando invece si vuole specificare il raggio di questi due intorni, ci si vale dei seguenti simboli convenzionali:

ε indica il raggio di $I(\ell)$,
δ_ε indica il raggio del corrispondente $I(a)$.

In questo modo si ha che (fig. 52):
– quando x varia in $I(a,\ \delta_\varepsilon)$, risulta

$$a-\delta_\varepsilon<x<a+\delta_\varepsilon, \quad \text{ossia} \quad -\delta_\varepsilon<x-a<\delta_\varepsilon \quad \text{o anche} \quad |x-a|<\delta_\varepsilon,$$

– se $y=f(x)$ appartiene a $I(\ell,\ \varepsilon)$, risulta

$$\ell-\varepsilon<f(x)<\ell+\varepsilon, \quad \text{ossia} \quad \ell-\varepsilon<f(x)-\ell<\varepsilon \quad \text{o anche} \quad |f(x)-\ell|<\varepsilon.$$

Quindi la definizione si può esprimere così:

data una funzione $y=f(x)$, il simbolo

$$\lim_{x\to a} y=\ell, \quad \textbf{ossia} \quad \lim_{x\to a} f(x)=\ell,$$

significa che, fissato comunque un intorno $I(\ell)$ di raggio ε, si può trovare un intorno $I(a,\ \delta_\varepsilon)$, tale che risulta

$$|f(x)-\ell|<\varepsilon,$$

per qualunque x appartenente a $I(a,\ \delta_\varepsilon)$.

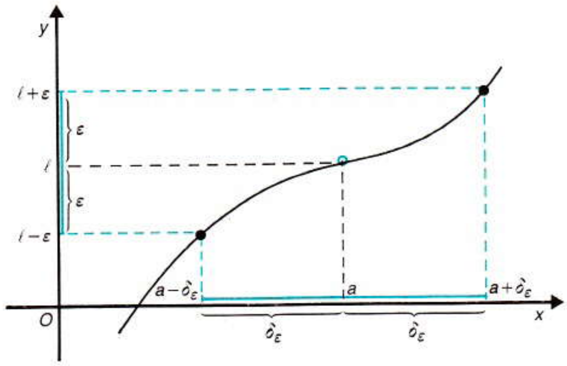

Fig. 52

C) Limite destro e limite sinistro

Cominciamo ancora una volta esaminando alcune curve: i due grafici delle figg. 53 e 54.

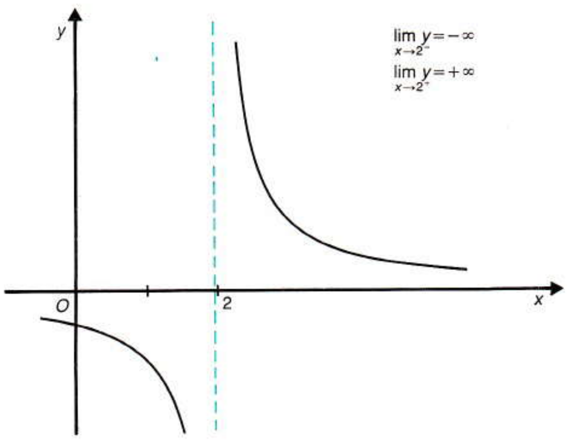

Fig. 53

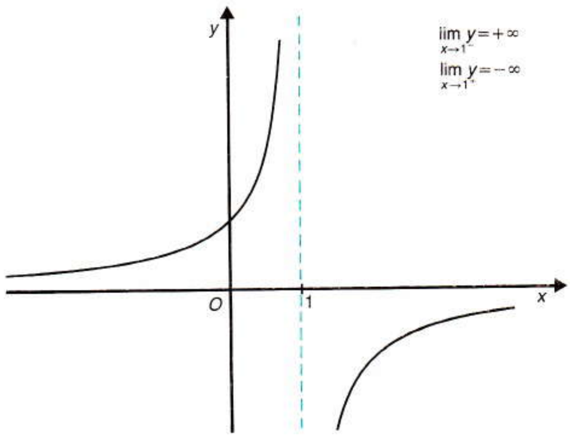

Fig. 54

Nel caso della fig. 53 la curva ha un asintoto verticale d'equazione $x=2$; ma si nota che:
- quando si sostituiscono ad x numeri che si avvicinano a 2 "da sinistra" (cioè che sono inferiori a 2), si ottengono valori di y negativi e sempre più grandi in valore assoluto; si scrive in tal caso

  $$\lim_{x \to 2^-} y = -\infty,$$

  e si legge "limite per x che tende a 2 da sinistra uguale a meno infinito".
- quando si sostituiscono ad x numeri che si avvicinano a 2 "da destra" (cioè che sono superiori a 2), si ottengono valori di y positivi e sempre più grandi; si scrive in questo caso

  $$\lim_{x \to 2^+} y = +\infty,$$

  e si legge "limite per x che tende a 2 da destra uguale a più infinito".

E così, nel caso di fig. 54, la curva presenta un asintoto verticale d'equazione $x=1$ e si ha

$$\lim_{x \to 1^-} y = +\infty, \qquad \lim_{x \to 1^+} y = -\infty.$$

Questi due casi hanno una caratteristica comune: quando si sostituiscono ad x numeri che si avvicinano ad un dato numero a, si ottengono valori di y sempre più grandi in valore assoluto, ma y mantiene un dato segno (per esempio positivo) se x si avvicina ad a da destra, mentre ha segno opposto, se si avvicina ad a da sinistra.
In casi come questo si distingue **il limite destro** dal **limite sinistro**, scrivendo

$$\lim_{x \to a^-} y = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a^+} y = +\infty, \tag{1}$$

oppure

$$\lim_{x \to a^-} y = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a^+} y = -\infty \tag{2}$$

Le definizioni che descrivono in modo più rigoroso queste situazioni sono del tutto analoghe a quelle presentate nella parte A), con un'unica modifica: invece di parlare di intorno di a di raggio δ_M, si parla di **intorno destro** ed **intorno sinistro** di a (fig. 55).
Il termine **intorno destro** di raggio δ_M indica l'insieme di numeri reali x che soddisfano le disuguaglianze

$$a < x < a + \delta_M, \quad \text{ossia} \quad |x-a| < \delta_M \quad \text{con} \quad x > a;$$

e così l'**intorno sinistro** indica l'insieme di numeri reali x che soddisfano le disuguaglianze seguenti

$$a - \delta_M < x < a, \quad \text{ossia} \quad |x-a| < \delta_M \quad \text{con} \quad x < a.$$

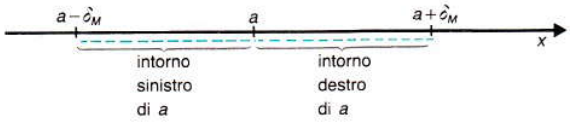

Fig. 55

Talvolta, invece di scrivere i simboli (1) o (2) si scrive più brevemente

$$\lim_{x \to a} y = \infty,$$

indicando così il fatto che y diventa sempre più grande in valore assoluto, quando x assume valori prossimi ad a.

Esaminiamo infine il grafico di una funzione meno usuale; vedremo così un'altra situazione in cui è opportuno distinguere il limite destro da quello sinistro.

In fig. 56 è rappresentata la funzione[1] $y=[x]$, per cui risulta, per esempio:

$$\lim_{x\to 1^-} y=0, \qquad \lim_{x\to 1^+} y=1;$$
$$\lim_{x\to 2^-} y=1, \qquad \lim_{x\to 2^+} y=2.$$

Nel caso esaminato si ha la situazione seguente: quando si sostituiscono ad x valori sempre più prossimi ad un numero a, si ottengono valori di y sempre più vicini ad un numero finito, ma y si avvicina ad un certo numero ℓ_1, se x si avvicina ad a da destra, mentre y si avvicina ad un altro numero ℓ_2, se x si si avvicina ad a da sinistra.

Anche in casi come questo (fig. 57) si distingue il limite destro dal limite sinistro, scrivendo

$$\lim_{x\to a^-} y=\ell_2, \qquad \lim_{x\to a^+} y=\ell_1.$$

Le definizioni che descrivono in modo più rigoroso queste situazioni sono del tutto analoghe a quelle presentate nella parte B), con un'unica modifica: invece di parlare di intorno di a, si parla di intorno destro ed intorno sinistro di a.

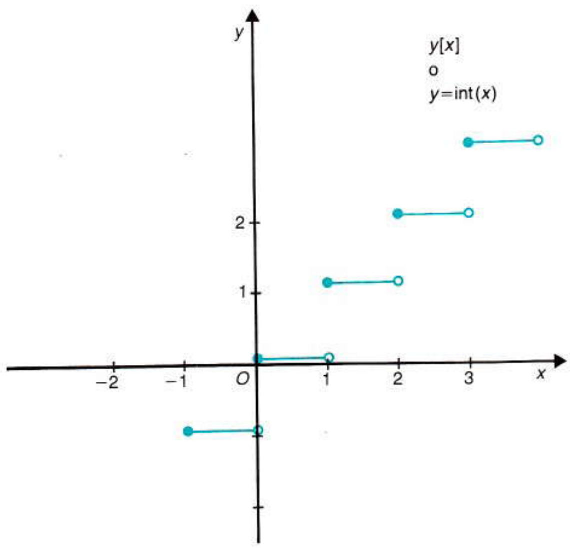

Fig. 56

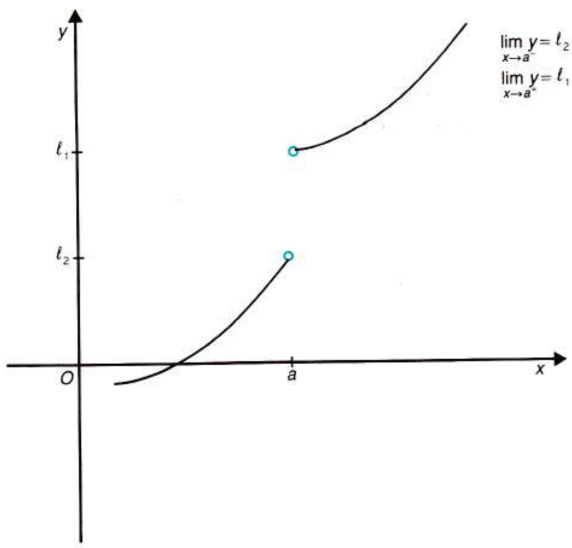

Fig. 57

[1] Vedi cap. 1, paragrafo 7.

7. Una definizione unitaria di limite

Nel corso di questo capitolo abbiamo incontrato il concetto di limite in situazioni diverse, che però presentavano notevoli analogie, tanto da essere descritte per mezzo dello stesso simbolo. Si capisce quindi l'interesse a ricercare una definizione unitaria di limite che comprenda i vari casi incontrati nei paragrafi 3 e 6 come casi particolari.

È facile arrivare a questa definizione unitaria, se si estende la nozione di intorno, in modo da applicarla anche alle situazioni in cui compare il simbolo ∞. Ecco come si può procedere.
Si immagina di completare la retta reale con due punti: il punto $-\infty$, che precede tutti i punti della retta reale, ed il punto $+\infty$, che segue tutti i punti della retta reale (fig. 58).

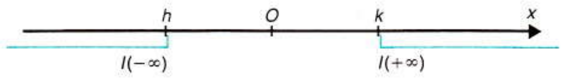

Fig. 58

Così l'insieme di numeri reali x, che soddisfano la disuguaglianza

$$x>k$$

prende il nome di **intorno di** $+\infty$; mentre l'insieme di numeri x, che soddisfano la disuguaglianza

$$x<h,$$

prende il nome di **intorno di** $-\infty$.
In questo modo si arriva alla seguente **definizione unitaria di limite**:

data una funzione $y=f(x)$, il simbolo

$$\lim_{x\to a} y=\ell, \quad \textbf{ossia} \quad \lim_{x\to a} f(x)=\ell,$$

significa che, fissato comunque un intorno $I(\ell)$, si può trovare un intorno $I(a)$ tale che y appartiene ad $I(\ell)$, quando si sceglie x in $I(a)$.

Due importanti osservazioni:
1) questa definizione riassume tutte quelle esposte nei paragrafi 3 e 6, purché si ricordi che al posto di a ed ℓ si può pensare qualunque numero reale o, anche, i simboli $+\infty$ e $-\infty$;
2) questo modo di presentare il concetto di limite potrebbe facilmente condurre a un errore: trattare i simboli $+\infty$ e $-\infty$ come numeri. Occorre invece ricordare sempre che i simboli $+\infty$ e $-\infty$ non possono essere considerati come numeri e non si possono eseguire con essi le usuali operazioni.

La definizione unitaria di limite ha notevole importanza teorica: permette infatti di dimostrare in modo semplice e breve delle proprietà che richiederebbero altrimenti lunghe e faticose trattazioni.

Due esempi di queste dimostrazioni sono esposte nel paragrafo seguente.

8. Due teoremi sui limiti

In questo paragrafo esaminiamo due teoremi che descrivono delle proprietà dei limiti: il teorema della permanenza del segno ed il teorema dell'unicità del limite.

A) Teorema della permanenza del segno

Il teorema può essere enunciato nel modo seguente:
Se per una funzione $y=f(x)$ risulta

$$\lim_{x\to a} f(x)=\ell, \quad \text{con} \quad \ell\neq 0,$$

la funzione mantiene lo stesso segno di ℓ, quando x varia in un opportuno intorno $I(a)$.
Questo teorema conduce a dimostrare in modo rigoroso una proprietà che è facile scoprire graficamente: una funzione $y=f(x)$, che tende per esempio al limite positivo ℓ, avrà come grafico una delle curve di fig. 59; se la curva si avvicina al punto $A(a, \ell)$, ci dovrà essere un intorno di a, in cui risulta

$$f(x)>0.$$

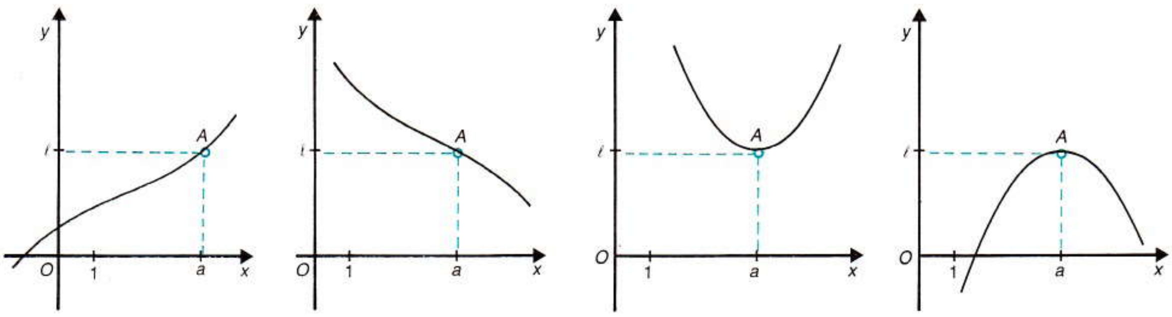

Fig. 59

Passiamo ora alla dimostrazione del teorema, tenendo presente che:
- **l'ipotesi** è costituita dalla seguente condizione:
  per una funzione $y=f(x)$ risulta $\lim_{x\to a} f(x)=\ell$, con $\ell\neq 0$;
- **la tesi** è che esiste un intorno $I(a)$, in cui y mantiene lo stesso segno di ℓ;
- **la dimostrazione** del teorema consiste nel verificare che dall'ipotesi segue necessariamente la tesi.

Cominciamo col dimostrare il teorema nel caso in cui risulta $\ell>0$.
Dall'ipotesi segue che, scelto un intorno qualunque $I(\ell)$, si può sempre trovare un intorno $I(a)$, tale che y cada in $I(\ell)$, quando x varia in $I(a)$. Scegliamo allora un intorno $I(\ell)$ di raggio $\varepsilon=\ell$ e troviamo il corrispondente $I(a)$ (fig. 60). Quando x varia in $I(a)$, si avrà

$$0<f(x)<2\ell.$$

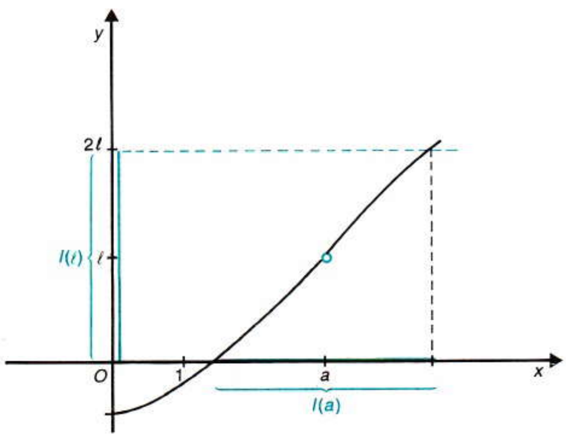

Fig. 60

Si è così individuato un intorno $I(a)$ tale che y rimane positiva (come il valore ℓ), mentre x varia in $I(a)$.
Questa dimostrazione si può ripetere nel caso in sui risulta $\ell<0$, scegliendo un intorno $I(\ell)$ di raggio $\varepsilon=-\ell$; resta così dimostrato il teorema.

Due osservazioni importanti:

1) il teorema è sempre valido, qualunque sia il significato che assume a (un numero o il simbolo ∞);
2) il teorema porta all'affermazione seguente:
   - **se** risulta $\lim_{x\to a} f(x)=\ell$, con $\ell>0$,
   - **allora** si può trovare un intorno $I(a)$, in cui risulta $f(x)>0$.

Ci si può chiedere se vale anche il seguente **teorema inverso** di quello appena dimostrato:
- **se** risulta $f(x)>0$ in un intorno $I(a)$,
- **allora** si ha $\lim_{x\to a} f(x)=\ell$, con $\ell>0$,

Basta un esempio per rendersi conto che occorre molta cautela nel considerare questo teorema inverso. Per la funzione

$$y=(x-2)^2,$$

rappresentata in fig. 61, risulta $y>0$, quando x varia in un qualunque intorno $I(2)$, ma si ha

$$\lim_{x\to 2} y=0.$$

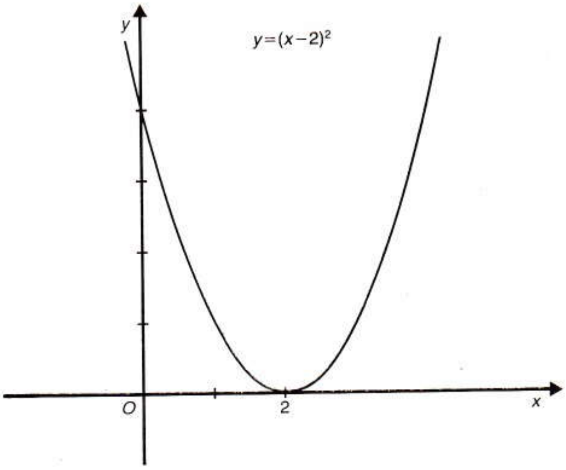

Fig. 61

B) Teorema dell'unicità del limite

Il teorema può essere enunciato nel modo seguente:
non è possibile che una funzione $y=f(x)$ ammetta due limiti diversi, quando $x\to a$.
La dimostrazione di questo teorema procede **per assurdo**: si comincia col supporre che il teorema sia falso; a partire da questa supposizione, si traggono varie conseguenze, fino a scoprire che la supposizione di partenza è inaccettabile. A questo punto, la dimostrazione è completata, perché il teorema deve essere necessariamente vero, visto che non può essere falso.
Cominciamo dunque col supporre che, per una funzione $y=f(x)$, risulti:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\ell_1 \qquad (1)$$

e

$$\lim_{x\to a} f(x)=\ell_2 \qquad (2)$$

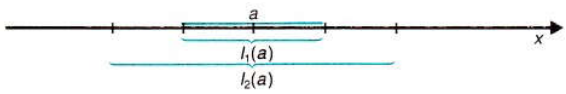

Fig. 62

con $\ell_1\neq\ell_2$.
Allora, in base alla definizione di limite, si ha che:
- a partire dalla condizione (1), scelto comunque un intorno $I(\ell_1)$, si può trovare un intorno $I_1(a)$, tale che y appartiene ad $I(\ell_1)$, se x varia in $I_1(a)$;
- a partire dalla condizione (2), scelto comunque un intorno $I(\ell_2)$, si può trovare un intorno $I_2(a)$, tale che y appartiene ad $I(\ell_2)$, se x varia in $I_2(a)$.

Ora, dato che risulta $\ell_1 \neq \ell_2$, si possono scegliere due intorni $I(\ell_1)$ e $I(\ell_2)$ che non abbiano punti in comune; invece i due intorni $I_1(a)$ e $I_2(a)$ avranno certamente dei punti in comune (fig. 62).
Scegliamo allora x proprio nella parte comune ai due intorni $I_1(a)$ e $I_2(a)$; è chiaro che sono verificate entrambe le condizioni (1) e (2), perciò la corrispondente y deve trovarsi nella parte comune ai due intorni $I(\ell_1)$ e $I(\ell_2)$. Ma **questo è assurdo**, perché i due intorni $I(\ell_1)$ e $I(\ell_2)$ non hanno punti comuni.

Resta così dimostrato che il teorema è vero: una funzione non può avere due limiti diversi ℓ_1 e ℓ_2 per $x \to a$.

È importante ora sottolineare la generalità del teorema: la dimostrazione presentata è sempre valida, qualunque sia il significato delle lettere a, ℓ_1 o ℓ_2; tali lettere possono dunque indicare numeri o i simboli $+\infty$ e $-\infty$.

Vale anche la pena di confrontare gli enunciati e le dimostrazioni dei due teoremi esaminati in questo paragrafo:
- il teorema A) enuncia una proprietà che si può interpretare facilmente da un punto di vista geometrico-intuitivo e viene dimostrato in modo diretto;
- nel teorema B) invece, sia l'enunciato, apparentemente ovvio, che la rigida dimostrazione per assurdo portano ad abbandonare l'intuizione.

I due teoremi forniscono dunque un esempio, particolarmente espressivo, di due diversi modi di sviluppare l'analisi matematica:
- un metodo geometrico-intuitivo, largamente appoggiato sull'intuizione,
- un metodo logico-algebrico, molto attento al rigore formale.

Si tratta di due metodi che sembrano inconciliabili; eppure gli sviluppi più interessanti della matematica si trovano proprio dove si sono alternate geniali intuizioni e rigorose dimostrazioni, arricchendosi vicendevolmente.

L’implicazione nella dimostrazione dei teoremi

Le dimostrazioni dei teoremi – della permanenza del segno e dell’unicità del limite – sono basate su un argomento, che non è esplicitamente menzionato: **l’implicazione**. Vediamo ora qualche semplice riflessione su questo argomento che ricorre nel corso del testo.
La parola “implicazione” ed il corrispondente verbo “implicare” provengono dal latino “in-plicare”, cioè “piegare dentro”. Perciò il significato immediato di “implicare” è “racchiudere in sé, contenere, …”, anche se oggi è più conosciuto il significato: “coinvolgere, rendere corresponsabile, …”. In matematica, invece, si trova il termine implicare nel suo significato più proprio.
Vediamo meglio di cosa si tratta, esaminando il teorema della permanenza del segno, che ora riscriviamo in una forma più adatta alle nostre riflessioni: se una funzione ammette, per x che tende ad a, un limite positivo, si trova sempre un intorno $I(a)$ in cui la funzione ha segno positivo.

Esaminando questo enunciato, si nota che esso è composto di due proposizioni più semplici e cioè:

l’ipotesi *Ip*: “una funzione ammette un limite positivo per x che tende ad a”.
la tesi *Th*: “si trova un intorno $I(a)$, in cui la funzione ha segno positivo”.

L’enunciato del teorema è: “dal fatto che *Ip* è vera, segue che *Th* è vera”. Perciò, se possiamo verificare che *Ip* è vera (una funzione ammette un limite positivo per $x \to a$), siamo certi che anche *Th* è vera (e cioè si trova un $I(a)$ in cui la funzione mantiene segno positivo).
Queste considerazioni si esprimono più brevemente dicendo che

_Ip_ implica _Th_,

(cioè l’ipotesi *Ip* racchiude in sé la tesi *Th*) e si scrive così:

$$Ip \Rightarrow Th.$$

Questa formula può essere “tradotta” da tante frasi diverse, ma di uguale significato. Ecco qualche esempio:

- l’ipotesi implica la tesi,
- se è vera l’ipotesi, allora è vera la tesi,
- basta che l’ipotesi sia vera, per essere certi che anche la tesi è vera,
- l’ipotesi è condizione sufficiente per la tesi,
- bisogna che sia vera la tesi, perché sia vera anche l’ipotesi,
- la tesi è condizione necessaria per l’ipotesi, …

La dimostrazione del teorema, data nel testo, consiste dunque nel verificare che dall’ipotesi *Ip* discende la proposizione *Th*.
Può però succedere che *Th* sia vera e *Ip* sia falsa (si trova un $I(a)$ in cui la funzione si mantiene positiva, ma il limite ℓ per $x \to a$ non è positivo, perché si ha invece $\ell = 0$). In tal caso si può dire che

_Th_ non implica _Ip_

e scrivere

$$Th \not\Rightarrow Ip;$$

ma si può anche dire che la tesi è condizione necessaria ma non sufficiente per l’ipotesi.

Viceversa, dopo aver dimostrato che *Ip* implica *Th*, siamo anche certi che, se *Th* non è vera, anche *Ip* non è vera (se non si trova un $I(a)$ in cui $f(x)$ si mantiene positiva, la funzione non ammette un limite positivo).
Dunque dire che

Ip implica Th

equivale a dire che

non Th implica non Ip.

Proprio su questa considerazione sono basate le dimostrazioni per assurdo, come quella data per il teorema dell'unicità del limite.
L'idea su cui si basa una dimostrazione per assurdo è dunque la seguente: invece di dimostrare che dall'ipotesi *Ip* vera segue la tesi *Th* vera, si dimostra che dalla tesi *Th* non vera, segue l'ipotesi *Ip* non vera.

Le considerazioni che abbiamo svolto sembrano limitate ad un ristretto ambito matematico, ma è facile rendersi conto che non è così.
Cominciamo con qualche esempio preso dal mondo della matematica.

I) Dal fatto che due grandezze sono direttamente proporzionali segue necessariamente che al crescere di una grandezza cresce anche l'altra; ma non basta sapere che al crescere di una grandezza cresce anche l'altra, per essere sicuri che le grandezze sono direttamente proporzionali (potrebbero essere legate da una legge parabolica o esponenziale, ...). Questo lungo discorso può essere riassunto molto brevemente: basta indicare le condizioni esaminate nel modo seguente

P "essere una legge di proporzionalità diretta",
C "essere legge crescente",

e scrivere

$\boldsymbol{P \Rightarrow C}$. $\quad \boldsymbol{C \not\Rightarrow P}$.

II) Condizione necessaria e sufficiente perché due rette r ed r' d'equazione $y=mx+n$ e $y'=m'x+n'$ siano parallele è che risulti $m=m'$.
Ora, esaminando le due condizioni

A "r è parallela ad r'",
B "risulta $m=m'$",

si trova che

$\boldsymbol{A \Rightarrow B}$ e $\boldsymbol{B \Rightarrow A}$;

in questo caso si scrive più brevemente

$\boldsymbol{A \Leftrightarrow B}$.

Vediamo infine qualche esempio preso dalla "vita di tutti i giorni" su cui discutere:

III) Non fumare è condizione necessaria o sufficiente per evitare il tumore al polmone?
IV) Avere appoggi influenti è condizione necessaria o sufficiente per ottenere un lavoro?
V) Studiare molto a casa è condizione necessaria o sufficiente per avere una buona valutazione scolastica?
VI) Conoscere bene la materia da insegnare è condizione necessaria o sufficiente perché un insegnante sia valido?