Pagine tratte dal testo fuori catalogo
E. Castelnuovo, C. Gori Giorgi, D. Valenti
'Elementi di analisi matematica'

Algebra dei limiti infiniti II. Approfondimento2

1. Successioni

Sappiamo che un numero reale $\left(\frac{1}{3}, \sqrt{2}, \ldots\right)$ può essere rappresentato con numeri decimali. Si ha, per esempio:

$$\frac{1}{3}=0{,}3333\ \ldots$$

ossia $\frac{1}{3}$ è approssimato dalla seguente **successione** di numeri:

$$0{,}3; \quad 0{,}33; \quad 0{,}333; \quad 0{,}333; \quad \ldots \tag{1}$$

I numeri decimali ora scritti sono sempre più vicini ad $\frac{1}{3}$; possiamo dire che $\frac{1}{3}$ è il limite della successione (1), quando il numero n delle cifre dopo la virgola diventa sempre più grande.
Questo andamento della successione (1) si può visualizzare rappresentando i numeri sulla retta (fig. 1).

In modo analogo si può visualizzare la successione di numeri razionali che approssima il numero irrazionale $\sqrt{2}$ (fig. 2) o il numero π (fig. 3).

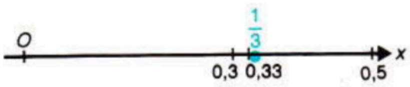


Fig.1

Fig.2

Fig.3

In questi esempi siamo partiti da un numero $\left(\frac{1}{3}, \sqrt{2} \text{ o } \pi\right)$ per esprimerlo come **limite di una successione**. Seguiamo ora il cammino inverso: partiamo da una successione di numeri per studiarne l'andamento; ecco qualche esempio:
La successione dei reciproci dei numeri naturali, cioè

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{n}, \quad \ldots \tag{2}$$

È facile capire che questi numeri vanno avvicinandosi a zero all'aumentare del denominatore n: basta rappresentare i numeri sulla retta (fig. 4) per osservare che i punti d'ascissa $\frac{1}{n}$ tendono al punto O d'ascissa zero al crescere di n.

In questo caso risulta particolarmente espressiva la rappresentazione geometrica di fig. 5: i rettangoli colorati in figura hanno tutti la base lunga 1, mentre le altezze diventano successivamente $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ dell'altezza iniziale che vale 1.

Così le aree dei successivi rettangoli sono date dai termini della successione (2) e tendono quindi a zero.

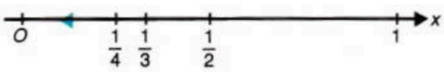


Fig.4

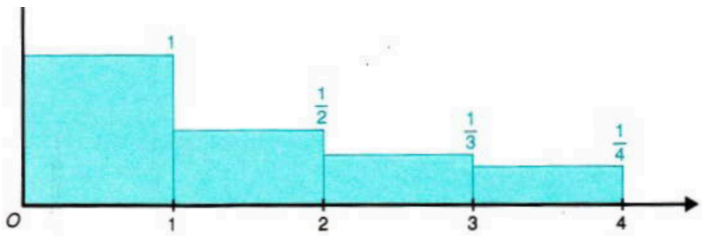


Fig.5

Una situazione analoga si verifica per la successione

$$1, \quad \frac{-1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{-1}{4}, \quad \dots \qquad (3)$$

in cui il termine che occupa il posto n si può indicare con

$$\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

infatti, se n è pari, $n+1$ è dispari e quindi si ha:

$$(-1)^{n+1}=-1$$

e se n è dispari, $n+1$ è pari e risulta

$$(-1)^{n+1}=1$$

Anche ora gli elementi della successione tendono a zero, quando n cresce; ma i numeri sono alternativamente positivi e negativi, perciò la successione oscilla intorno al punto O. In questo caso la rappresentazione dei numeri sulla retta (fig. 6) dice poco, mentre è particolarmente espressiva l'interpretazione grafica di fig. 7.

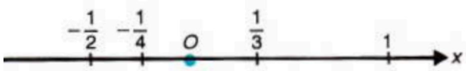


Fig.6

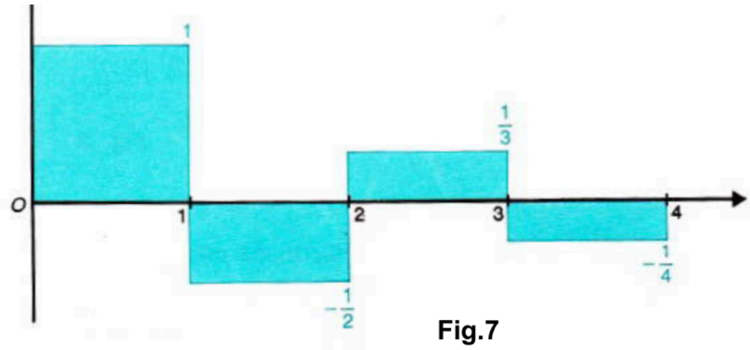


Fig.7

Consideriamo ora la successione

$$2, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{4}{3}, \quad \frac{5}{4}, \quad \dots, \quad \frac{n+1}{n}, \quad \dots$$

È facile intuire che il limite della successione è 1, se si rappresentano gli elementi della successione sulla retta (fig. 8).

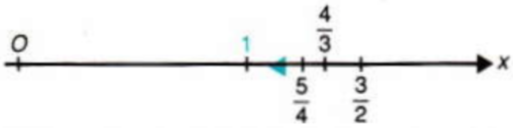


Fig. 8

Tutti questi esempi conducono ad una prima idea di successione e di limite di una successione; si potrebbe dire che:

- una successione è una "fila" ordinata di numeri;
- un numero a è il limite di una successione di numeri, quando il termine che nella successione occupa il posto n dà un'ottima approssimazione di a, se n è molto grande.

Ora è facile rendersi conto che queste nozioni intuitive fanno nascere molti dubbi; ecco due questioni su cui riflettere:

1) L'insieme di numeri reali contenuti nell'intervallo $[0, 1]$ è una successione?
   Si capisce che l'insieme indicato forma una fila ordinata di numeri, perché dati due elementi si riesce sempre a stabilire qual'è il più grande; ma, fissato come primo elemento il numero 0, non si riesce ad indicare il 2°, il 3°, … e dunque il dubbio rimane!
2) Il limite della successione che ha come termine generico

   $$\frac{1}{10^6}+\frac{1}{n}$$

   è 0 oppure $\frac{1}{10^6}$?

È chiaro che, se n è molto grande, $\frac{1}{n}$ assume un valore molto piccolo e, dunque, il termine che occupa il posto n dà un'ottima approssimazione di

$$\frac{1}{10^6}$$

Ma quest'ultimo numero è molto vicino a 0 e quindi quello stesso termine è un'ottima approssimazione di 0. Si capisce che l'idea di "ottima approssimazione" è troppo vaga ed imprecisa per risolvere questo dubbio.

2. Limite di una successione

Per trovare una risposta chiara ai due quesiti posti nel paragrafo precedente occorre precisare il significato di due vocaboli che abbiamo introdotto:

1) successione,
2) limite di una successione.

1) Precisiamo il significato che ha in matematica il vocabolo **successione**:

si chiama successione una funzione che ha come dominio l'insieme dei numeri naturali (ossia gli interi positivi 1, 2, 3, ...).

In generale, per descrivere i valori di una successione in corrispondenza di ogni numero naturale

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad n, \quad \ldots$$

ci si vale dei simboli

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots$$

che si leggono "a con uno, a con due, a con tre, ... a con enne".

Questi simboli conducono a "contare" gli elementi della successione, indicandone il primo, il secondo, il terzo, ..., quello al posto ennesimo, ...

Così ci si rende conto che l'insieme dei numeri reali che appartengono all'intervallo $[0, 1]$ non è una successione. Infatti, fissato come primo elemento il numero 0, non si riesce, per esempio, a stabilire il numero che viene subito dopo 0: non può essere 0,5, perché prima troviamo 0,1, ma non può essere neanche 0,1, perché prima troviamo 0,01 ...

Con il simbolo di funzione

$$y=f(x)$$

si può scrivere

$$a_1=f(1), \quad a_2=f(2), \quad a_3=f(3), \quad \ldots$$

e, in generale

$$a_n=f(n).$$

In questo modo possono essere descritte molto più sinteticamente alcune successioni introdotte nel paragrafo precedente:

– invece di

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{n}, \quad \ldots$$

si può scrivere

$$a_n=\frac{1}{n}$$

– invece di

$$1, \quad \frac{-1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \ldots, \quad \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad \ldots$$

si scrive

$$a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

– invece di

$$2, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{4}{3}, \quad \frac{5}{4}, \quad \ldots, \quad \frac{n+1}{n}, \quad \ldots$$

si scrive

$$a_n=\frac{n+1}{n}$$

2) Le successioni sono particolari funzioni, perciò possiamo applicare ad una successione le definizioni e le regole di calcolo valide per i limiti di funzione per $x \to +\infty$.
Troviamo però per le successioni i seguenti termini particolari.

- ***Se risulta*** $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell$, si dice che *la successione è convergente* o che *la successione converge verso il limite* ℓ.
- ***Se risulta*** $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, si dice che *la successione è divergente.*
- ***Se la successione non è né convergente, né divergente***, si dice che *è indeterminata.*

Ecco alcuni esempi di limiti di successione espressi con questo linguaggio.

- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=\mathbf{0}$ **,** perciò la successione $\boldsymbol{a_n}=\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}$ *converge verso il limite* **0**;
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{10^6}+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{10^6}$ **,** perciò la successione $\boldsymbol{a_n}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10^6}}+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}$ *converge verso il limite* $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10^6}}$;
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)=\mathbf{1}$ **,** perciò la successione $\boldsymbol{a_n}=\frac{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}$ *converge verso il limite* **1**;
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\boldsymbol{n^2}=+\infty$ **,** perciò la successione $\boldsymbol{a_n}=\boldsymbol{n^2}$ è *divergente*;
- è *indeterminata* la successione $\boldsymbol{a_n}=(-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}}$**.**

3. Serie

Riprendiamo una successione

$$a_1, a_2, \dots , a_n, \dots$$

e addizioniamo tutti gli infiniti termini della successione. Otteniamo una *serie*:

$$a_1+\ a_2+\cdots+\ a_n+\cdots$$

Per studiare l’andamento di una serie consideriamo la *successione delle somme parziali*:

$$S_1=a_1,\qquad S_2=a_1+\ a_2,\qquad S_3=a_1+\ a_2+a_3,\dots$$

E calcoliamo il limite di questa successione. Se la successione è convergente, troviamo:

$$\lim_{n\to+\infty}\boldsymbol{S_n}=\boldsymbol{S}$$

In questo caso diciamo che ***S*** *è la somma della serie* e scriviamo:

$$S=a_1+\ a_2+\cdots+\ a_n+\cdots$$

Per abbreviare la scrittura si usa un apposito simbolo: il simbolo di sommatoria e si scrive

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=S$$

Il simbolo si legge: ‘*Sommatoria di a con enne per enne che va da 1 a infinito*’ e indica la somma di tutti i termini a_n, pensando di sostituire ad n tutti i numeri naturali.

4. Serie geometriche

Vediamo ora qualche applicazione dei risultati ottenuti, esaminando le **serie geometriche**, cioè tutte le serie che si esprimono nella forma

$$\boldsymbol{a+aq+aq^2+aq^3+\ldots+aq^n+\ldots}$$

dove a e q sono numeri reali; a indica il primo termine, mentre q indica il quoziente fra un termine ed il precedente. Ecco qualche esempio:

$$5+15+45+\ldots+5\cdot3^n+\ldots \tag{1}$$

dove si ha $a=5$ e $q=3$;

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+\ldots \tag{2}$$

dove si ha $a=1$ e $q=\frac{1}{2}$.

Per stabilire se una serie geometrica è convergente occorre esaminare la successione delle sue ridotte, ossia

$$S_n=a+a\cdot q+a\cdot q^2+\ldots+a\cdot q^{(n-1)}$$

Per rendere più semplice lo studio di questa successione conviene procedere nel modo seguente:

– si calcola l'espressione

$$q \cdot S_n = a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + \ldots + a \cdot q^n$$

– si esegue la sottrazione

$$S_n - q \cdot S_n = a - a \cdot q^n, \qquad \text{ossia} \qquad (1-q) \cdot S_n = a \cdot (1-q^n)$$

– si ottiene infine

$$S_n = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \qquad \text{o anche} \qquad S_n = a\left(\frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}\right)$$

Si individuano così vari casi possibili:

I) $|q|<1$ e quindi $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

In questo caso risulta

$$\lim_{n\to\infty} S_n = a \cdot \frac{1}{1-q} \qquad \text{e quindi} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a \cdot q^n = a \cdot \frac{1}{1-q}$$

II) $q \geq 1$

In questo caso la successione delle ridotte diverge e, quindi, diverge anche la serie geometrica.

III) $q \leq -1$

In questo caso la successione delle ridotte è indeterminata e, quindi, anche la serie geometrica è indeterminata.

Basiamoci su questi risultati per esaminare due esempi visti prima.
È divergente la serie (1) con a = 15 e q = 3, cioè $5 + 15 + 45 + 5 \cdot 3^n$.
Invece, per la serie (2) con a = 1 e $q = \frac{1}{2}$, cioè $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$, troviamo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

Quest'ultimo esempio permette anche di fissare l'attenzione sulla differenza fra successione e serie; si ha infatti che

– converge a 0 la successione

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{2^n}, \quad \ldots$$

– vale 2 la somma della serie

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

Questo vuol dire che i rettangoli di fig. 11 hanno l'area che tende a 0, quando n diventa molto grande; se però si sommano le aree di questi infiniti rettangoli, si ottiene una figura con l'area che vale 2.

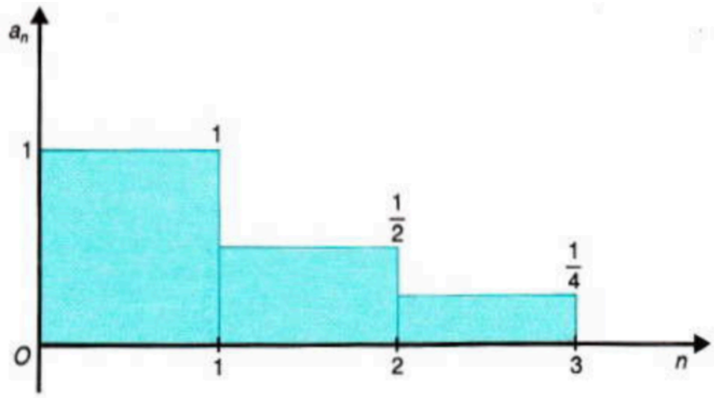


Fig.11

5. Applicazioni di successioni e serie

A. Proprietà sorprendenti della curva di von Koch

Serie e successioni portano a "lavorare con l'infinito" e spesso questo lavoro conduce a scoprire situazioni apparentemente paradossali. Uno degli esempi più intuitivi fu indicato dal matematico svedese H. von Koch (1870-1924), che ha ideato la costruzione seguente:

- si considera un triangolo equilatero con il lato lungo 1 (fig. 12);
- si divide ciascun lato in tre parti uguali e si costruisce sul segmento centrale un altro triangolo equilatero, esterno al triangolo iniziale (fig. 13);
- si cancella la base dei nuovi triangoli, ottenendo la stella di fig. 14;
- si ripete la costruzione a partire dai lati della stella (fig. 15).

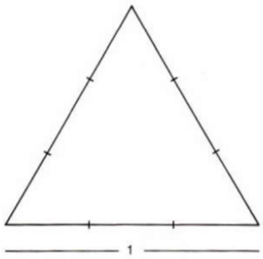


Fig.12

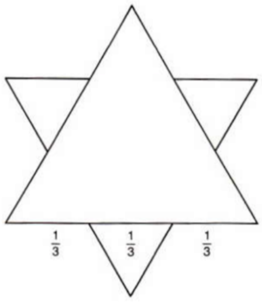


Fig.13

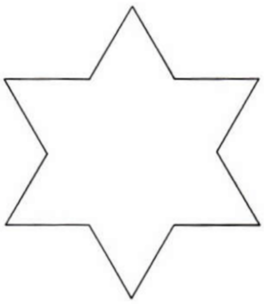


Fig.14

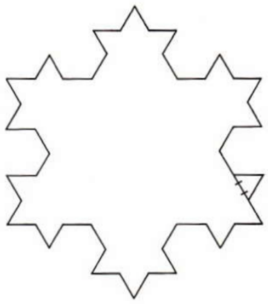


Fig.15

Continuando a ripetere la costruzione all'infinito, si ottiene una curva, nota come **curva di von Koch**. Questa curva presenta alcune proprietà sorprendenti, che possiamo scoprire esaminando le varie figure che via via si ottengono.
I lati hanno la lunghezza data da

$$1, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{9}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{3^n}$$

e risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3^n}=0$$

Dunque, **la lunghezza del lato tende a 0**, quando si ripete la costruzione.
I **perimetri** delle successive figure si calcolano tenendo presente che

- la prima figura è composta di 3 lati di lunghezza 1 e, dunque, ha perimetro

$$p_1=3\cdot 1$$

- per passare alla seconda figura, ad ogni lato della prima si sostituiscono 4 segmenti di lunghezza $\frac{1}{3}$, perciò si ottiene un perimetro dato da

$$p_2=3\cdot\left(4\cdot\frac{1}{3}\right)=3\cdot\frac{4}{3}$$

- per passare alla terza figura si ripete la costruzione, ottenendo un perimetro dato da

$$p_3=\left(3\cdot\frac{4}{3}\right)\cdot\frac{4}{3}=3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2$$

Ripetendo la costruzione, i perimetri costituiscono la successione

$$p_n=3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n$$

ed è facile verificare che risulta

$$\lim_{n\to+\infty} 3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n=+\infty$$

Si conclude che **il perimetro della figura diventa infinitamente lungo**, quando si ripete la costruzione.

Calcoliamo ora **l'area** racchiusa entro questo perimetro sempre più grande. Per questo dovremo sommare le aree seguenti:

– l'area del triangolo equilatero di lato 1 (fig. 16), che è data da

$$A_1=\frac{1}{4}\sqrt{3}$$

– l'area di 3 triangoli equilateri di lato $\frac{1}{3}$ (fig. 17), che è data da

$$A_2=3\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\sqrt{3}=\frac{1}{12}\cdot\sqrt{3}$$

– l'area di 12 triangoli equilateri di lato $\frac{1}{9}$ (fig. 18), che è data da

$$A_3=12\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^2\cdot\sqrt{3}=\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{12}\cdot\sqrt{3}$$

Continuando il procedimento (fig. 19) si arriva dunque a costruire una figura che ha l'area data dalla somma di tutte le aree calcolate prima; l'area A della figura è dunque data da

$$A=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{3}+\frac{1}{12}\cdot\sqrt{3}+\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{12}\cdot\sqrt{3}+\left(\frac{4}{9}\right)^2\cdot\frac{1}{12}\cdot\sqrt{3}+\ldots$$

Si scopre che, a parte il primo termine, A è data dalla somma di una progressione geometrica con

$$q=\frac{4}{9}<1 \qquad \text{e} \qquad a_1=\frac{1}{12}\cdot\sqrt{3}$$

Si ha dunque, in base ai risultati esposti nel numero precedente:

$$A=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{3}+\frac{a_1}{1-q}$$

ossia

$$A=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{3}+\frac{\frac{1}{12}\cdot\sqrt{3}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{2}{5}\cdot\sqrt{3}$$

Fig.16

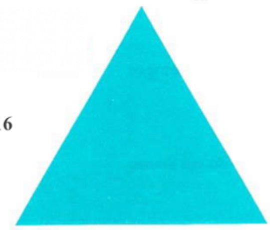
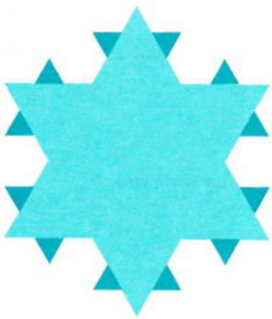


Fig.17

Fig.18



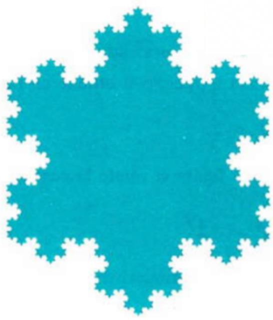


Fig.19

Si trova così che l'area non diventa infinitamente grande, ma si avvicina sempre di più al valore

$$A=\frac{2}{5}\cdot\sqrt{3}\approx 0{,}69$$

È interessante ora confrontare quest'area con l'area A_1 del triangolo da cui siamo partiti; si ha:

$$\frac{A}{A_1}=\frac{\frac{2}{5}\cdot\sqrt{3}}{\frac{1}{4}\cdot\sqrt{3}}=\frac{8}{5}=1{,}6$$

Si ha dunque un risultato sorprendente: un'area compresa da un contorno che, col pensiero, vediamo estendersi all'infinito, risulta poco più grande di una volta e mezzo il triangolo da cui siamo partiti!

B. *Successioni e serie per rappresentare i numeri π, e*

In questo paragrafo vedremo degli esempi di successioni e di serie che convergono verso due importanti numeri irrazionali: e, π.
Cominciamo col considerare una successione che approssima il numero e:

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

i cui primi termini sono

$$a_1=1, \quad a_2=2,25, \quad a_3\approx 2,37, \quad a_4\approx 2,44, \quad a_5\approx 2,49, \quad \ldots$$

Si tratta di una successione che ha come limite il numero di Nepero[1], indicato convenzionalmente con il simbolo e. Il numero e è un numero irrazionale, le cui prime cifre sono

$$\boldsymbol{e\approx 2,7182818}\text{; si ha dunque } \boldsymbol{e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Si dimostra che lo stesso numero e si può anche ottenere come somma di una serie; si ha:

$$\boldsymbol{e=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}}, \qquad \text{ossia} \qquad \boldsymbol{e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots}$$

con

$$1!=1, \quad 2!=1\cdot 2, \quad \ldots, \quad n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$$

Vediamo ora come ottenere delle buone approssimazioni del numero π, valendosi di una successione oppure di una serie.
Una successione che converge verso π si può ottenere con un procedimento geometrico, basato sulle seguenti considerazioni:

1) la lunghezza l di una circonferenza di raggio r è data da $l=2\pi r$ perciò π indica la lunghezza di una circonferenza di raggio $\frac{1}{2}$;
2) la lunghezza di una circonferenza si può approssimare con i perimetri di poligoni inscritti.

Si fissa quindi l'attenzione sulla circonferenza di raggio $\frac{1}{2}$ (fig. 20) e, a partire dal quadrato, si considerano i poligoni inscritti, che si ottengono raddoppiando successivamente il numero dei lati. Si ha che

– il quadrato (fig. 21) ha perimetro $a_1=2\cdot\sqrt{2}$
– l'ottagono (fig. 22) ha perimetro $a_2=2^2\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}$

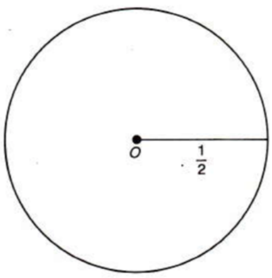


Fig.20

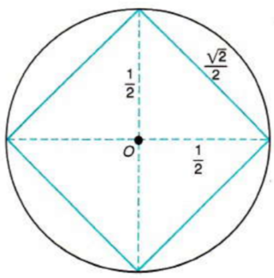


Fig.21

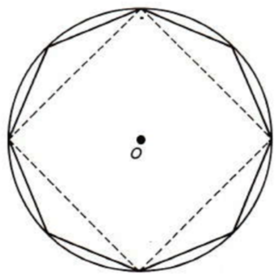


Fig.22

Continuando, si ottiene il poligono con $16=2^4$ lati che ha perimetro

$$a_3=2^3\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

In generale il poligono con 2^{n+1} lati ha perimetro

$$a_n=2^n\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}$$

Si ottiene così una successione che converge verso π; i primi termini sono

$$a_1\approx 2,84, \quad a_2\approx 3,04, \quad a_3\approx 3,09, \quad \ldots$$

e, dunque, la successione converge abbastanza lentamente.
Si deve poi ad Eulero, grande matematico svizzero del XVIII secolo, una delle più semplici formule per ottenere π come somma di una serie; la formula è la seguente:

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots}, \qquad \text{ossia} \qquad \boldsymbol{\frac{\pi}{4}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{2n+1}}$$

Anche questa formula permette di avvicinarsi lentamente a π, dato che risulta, per esempio:

$$\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)4\approx 2,895$$

1. Vedi sul sito *Matemat* la lezione *'Il numero e'* http://www.matemat.it/page-8/#lez4