ESERCIZI

Sui limiti infiniti

Per svolgere gli esercizi dal 17 al 28 occorre tenere presenti le seguenti nozioni:

A) la definizione

data una funzione $y=f(x)$, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} y=+\infty, \quad \textit{ossia} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty,$$

se si verifica la seguente condizione:
scelto un numero M, positivo e grande a piacere, si può sempre trovare un valore di x, detto x_M, tale che risulti

$$f(x)>M \quad \textit{per qualunque } x>x_M.$$

B) i procedimenti per risolvere le disequazioni,

17. Verificare che sono corrette le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty} (2x)=+\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{4}x\right)=+\infty$$

(Per risolvere, per esempio, il 1° esercizio, si può procedere così: in base alla definizione A), occorre verificare che, scelto un numero M, positivo e grande a piacere, si può sempre trovare un valore di x, detto x_M, tale che risulti

$$2x>M \quad \textit{per qualunque } x>x_M.$$

Esaminiamo dunque la disequazione

$$2x>M,$$

in cui M indica un qualunque numero positivo; le soluzioni di questa disequazione, cioè i valori di x per cui la disequazione è verificata, sono i seguenti:

$$x>\frac{M}{2}.$$

Questo vuol dire che la condizione A) è verificata con

$$x_M=\frac{M}{2}$$

e, dunque, la scrittura è corretta).

18. Ripetere l'esercizio 17, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty} (2x-4)=+\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} (3x+5)=+\infty$$

19. Ripetere l'esercizio 17, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} (x^2-1)=+\infty$$

(Nel primo caso la disequazione

$$x^2>M$$

ha le seguenti soluzioni

$$x>\sqrt{M} \quad o \quad x<-\sqrt{M},$$

fra le quali troviamo verificata, in particolare, la condizione A) con

$$x_M=\sqrt{M}\ldots)$$

20. Ripetere l'esercizio 17, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty} (x^2+1)=+\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} (x^2-2x)=+\infty$$

21. Ripetere l'esercizio 17, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty} (x^2-4x+4)=+\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} (x^2-6x+5)=+\infty$$

22. Ripetere l'esercizio 17, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2x+1}=+\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x+1}{2x}=+\infty$$

(Nel 1° caso, fra le soluzioni della disequazione

$$\frac{x^2}{2x+1}>M,$$

si trovano i seguenti valori di x

$$x>M+\sqrt{M^2+M}.$$

Questo vuol dire che è verificata la condizione A) con

$$x_M=M+\sqrt{M^2+M}.)$$

23. Ripetere l'esercizio 17, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{2x+3}=+\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1-x^2}{1-x}=+\infty$$

24. Ripetere l'esercizio 17, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x-1}=+\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+4}=+\infty$$

(Nel 1° caso, fra le soluzioni della disequazione

$$\sqrt{x-1}>M$$

si trovano i seguenti valori di x

$$x>M^2+1.$$

Questo vuol dire che è verificata la condizione A) con

$$x_M=M^2+1).$$

25. Ripetere l'esercizio 17, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}=+\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x-5}=+\infty$$

26. Ripetere l'esercizio 17, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$$

27. Verificare che sono errate le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty}(-4x)=+\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}(4-x^2)=+\infty$$

(Per esempio, nel 1° caso le soluzioni della disequazione

$$-4x>M$$

sono date da

$$x<-\frac{M}{4}\ \ldots)$$

28. Verificare che sono errate le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1}=+\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+x^2}=+\infty$$

Per svolgere gli esercizi dal 29 al 34 occorre tenere presenti, oltre ai procedimenti per risolvere le disequazioni, la seguente definizione:

data una funzione $y=f(x)$, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} y=-\infty, \quad \textit{ossia} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty,$$

se si verifica la seguente condizione:
scelto un numero M, positivo e grande a piacere, si può sempre trovare un valore di x, detto x_M, tale che risulti

$$f(x)<-M \quad \textit{per qualunque } x>x_M.$$

29. Verificare che sono corrette le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty} -2x=-\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} -\frac{2}{3}x=-\infty$$

(Nel 1° caso, le soluzioni della disequazione

$$-2x<-M,$$

sono date dai seguenti valori di x

$$x>\frac{M}{2}$$

e perciò la scrittura è corretta, perché è verificata la condizione ...)

30. Ripetere l'esercizio 29, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty} (3-5x)=-\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} (-3x+2)=-\infty$$

31. Ripetere l'esercizio 29, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty} (-x^2)=-\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} (4-x^2)=-\infty$$

(Nel primo caso la disequazione

$$-x^2<-M, \quad \textit{ossia} \quad -x^2+M<0,$$

ha le seguenti soluzioni

$$x>\sqrt{M} \quad o \quad x<-\sqrt{M},$$

fra le quali troviamo, in particolare, la condizione ...)

32. Ripetere l'esercizio 29, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty} (-x^2+4x)=-\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} (-x^2+4x-4)=-\infty$$

33. Ripetere l'esercizio 29, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty} (-x^2-1)=-\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} (-x^2+2x-1)=-\infty$$

34. Dimostrare che è vera la seguente affermazione:
se risulta $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, allora risulta anche $\lim_{x\to+\infty} [-f(x)]=-\infty$

(Tenere presente che, se risulta

$$f(x)>M, \quad \textit{per} \quad x>x_M,$$

risulta pure

$$-f(x)<-M, \quad \textit{per} \quad x>x_M \ ...)$$

Sui limiti finiti

Per svolgere gli esercizi dal 35 al 47 occorre tenere presenti, oltre ai procedimenti per risolvere le disequazioni, la seguente definizione:

data una funzione $y=f(x)$, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} y=\ell, \quad \textit{ossia} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell,$$

se si verifica la seguente condizione:
scelto un numero ε, positivo e piccolo a piacere, si può sempre trovare un valore di x, detto x_ε, tale che risulti

$$|f(x)-\ell|<\varepsilon \quad \textbf{per qualunque} \quad x>x_\varepsilon.$$

35. Verificare che sono corrette le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0, \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$$

(Per risolvere, per esempio, il 1° esercizio, si può procedere così: in base alla definizione, occorre verificare che, scelto un numero positivo ε piccolo a piacere, si può sempre trovare un valore di x, detto x_ε, tale che risulti

$$\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon \quad \textit{per qualunque} \quad x>x_\varepsilon \qquad (1)$$

Esaminiamo dunque la disequazione (1) dove ε indica un qualunque numero positivo; in base alla definizione di valore assoluto (o modulo) si ha che la (1) riassume le seguenti due disequazioni:

$$\frac{1}{x}<\varepsilon \qquad (1')$$

$$-\frac{1}{x}<\varepsilon \quad \textit{ossia} \quad \frac{1}{x}>-\varepsilon \qquad (1'')$$

Perciò, per risolvere la disequazione (1), occorre risolvere le disequazioni (1') e (1''); si ottengono le soluzioni seguenti:

$$x>\frac{1}{\varepsilon} \quad \textit{dalla disequazione (1')}$$

$$x<-\frac{1}{\varepsilon} \quad \textit{dalla disequazione (1'')}$$

In conclusione, per la funzione $y=\frac{1}{x}$, risulta in particolare

$$\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon \quad \textit{per qualunque} \quad x>\frac{1}{\varepsilon}$$

Questo vuol dire che la condizione (1) è soddisfatta con

$$x_\varepsilon=\frac{1}{\varepsilon}$$

e, dunque, l'uguaglianza assegnata è corretta).

36. Verificare che sono corrette le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+3\right)=3, \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}+3\right)=3$$

37. Verificare che sono corrette le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x+3}\right)=0, \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x+3}\right)=0$$

38. Verificare che sono corrette le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x+1}=2, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1-2x}{x+1}=-2$$

39. Verificare che sono corrette le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-3}{2x}=\frac{1}{2}, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{3-x}{2x}=-\frac{1}{2}$$

40. Verificare che sono corrette le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)=0, \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=0$$

(Nel 1° caso, si è condotti a risolvere la disequazione seguente:

$$\left|\frac{1}{x^2}\right|<\varepsilon, \quad \text{ossia} \quad \frac{1}{x^2}<\varepsilon, \quad \text{da cui} \quad x^2-\frac{1}{\varepsilon}>0$$

Fra le soluzioni della disequazione troviamo i seguenti valori di x:

$$x>\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$$

questo vuol dire che la condizione (1) è soddisfatta con

$$x_\varepsilon=\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$$

e, dunque, l'uguaglianza assegnata è corretta.)

41. Verificare che sono corrette le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}+1\right)=1, \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x^2}+1\right)=1$$

42. Verificare che sono corrette le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(x+1)^2}=0, \qquad \lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{(x+1)^2}=0$$

43. Verificare che sono corrette le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x^2}=0, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2-1}=0$$

44. Verificare che sono corrette le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{x^2}=3, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{3x^2}=\frac{1}{3}$$

45. Verificare che sono **errate** le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2+1}=1, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-2}=-2$$

mentre sono **corrette** le seguenti:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}+1\right)=1, \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-2\right)=-2$$

(Nel primo caso, per esempio, si trova la disequazione

$$\left|\frac{1}{x^2+1}-1\right|<\varepsilon, \quad \text{ossia} \quad \frac{x^2}{x^2+1}<\varepsilon, \quad \text{da cui} \quad (1-\varepsilon)x^2-\varepsilon<0.$$

Dato che risulta $0<\varepsilon<1$, la disequazione ha soluzioni $-\sqrt{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}<x<\sqrt{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}$, e perciò …)

46. Verificare che sono errate le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x}=1, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x+1}=0$$

47. Verificare che è vera la seguente affermazione:
se risulta $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell$, risulta anche $\lim_{x\to+\infty}[-f(x)]=-\ell$

(Tenere presenti le seguenti uguaglianze sempre vere:
$|f(x)-\ell|=|-[f(x)-\ell]|=|-f(x)-(-\ell)|$*).*

Sui simboli $+\infty$, $-\infty$, ∞

Per svolgere gli esercizi dal 48 al 52 occorre tenere presenti, oltre ai procedimenti per risolvere le disequazioni, le seguenti definizioni relative ad una data funzione $y=f(x)$.

Si scrive

A) $\lim_{x\to+\infty} y=\ell$, **ossia** $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell$,

B) $\lim_{x\to-\infty} y=\ell$, **ossia** $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\ell$,

C) $\lim_{x\to\infty} y=\ell$, **ossia** $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

se si verificano, rispettivamente, le seguenti condizioni:
scelto un numero ε, positivo e piccolo a piacere, si può sempre trovare un valore di x, detto x_ε, tale che risulti

A) $|f(x)-\ell\ |<\varepsilon$ **per qualunque** $x>x_\varepsilon$.

B) $|f(x)-\ell\ |<\varepsilon$ **per qualunque** $x<x_\varepsilon$.

C) $|f(x)-\ell\ |<\varepsilon$ **per qualunque** x, **che soddisfi** $|x|>x_\varepsilon$.

48. Esaminare le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=0, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0, \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x}=0$$

e risolvere i seguenti quesiti:

- spiegare la differenza fra le tre uguaglianze,
- verificare che le uguaglianze sono tutte vere.

In quale ordine conviene effettuare le verifiche richieste?

(Si può, per esempio, risolvere il 1° quesito dicendo che:

- *la seconda uguaglianza afferma che y assume valori sempre più vicini a 0, quando si assegnano ad x valori positivi sempre più grandi;*
- *la terza uguaglianza afferma che y assume valori sempre più vicini a 0, quando si assegnano ad x valori grandi in modulo, ma negativi;*
- *la prima uguaglianza riassume le altre due, affermando che y assume valori sempre più vicini a 0, quando si assegnano ad x valori sempre più grandi in modulo.*

Il grafico e la tabella di fig. 7 suggeriscono che le tre uguaglianze sono tutte vere; inoltre basta verificare la prima uguaglianza ...)

x	y
−1000	−0,002
−100	−0,02
−10	−0,2
⋮	⋮
−1	−2
⋮	⋮
1	2
10	0,2
100	0,02
1000	0,002

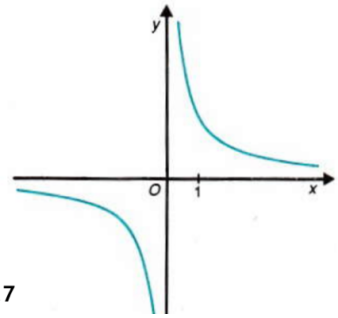

Fig. 7

49. Ripetere l'esercizio 48, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x}-2\right)=-2, \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{x}-2\right)=-2, \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}-2\right)=-2$$

50. Ripetere l'esercizio 48, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=0, \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=0, \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=0$$

51. Ripetere l'esercizio 48, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{1}{x^2}\right)=3, \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(3-\frac{1}{x^2}\right)=3, \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(3-\frac{1}{x^2}\right)=3$$

52. Esaminare le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to-\infty} e^x=0, \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x=0, \qquad \lim_{x\to\infty} e^x=0$$

e rispondere ai seguenti quesiti:

- spiegare la differenza fra le tre uguaglianze;
- verificare che le uguaglianze **non** sono tutte vere.

Per svolgere gli esercizi dal 53 al 60 occorre tenere presenti, oltre ai procedimenti per risolvere le disequazioni, le seguenti definizioni relative ad una data funzione $y=f(x)$:

Si scrive

A) $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$, ***ossia*** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$,

B) $\lim\limits_{x\to-\infty} y=+\infty$, ***ossia*** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$,

C) $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$, ***ossia*** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$,

D) $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$, ***ossia*** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$,

E) $\lim\limits_{x\to\infty} y=\infty$, ***ossia*** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$

se si verificano, rispettivamente, le seguenti condizioni:
scelto un numero M, positivo e grande a piacere, si può sempre trovare un valore di x, detto x_M, tale che risulti

A) $f(x)>M$ ***per qualunque*** $x>x_M$.

B) $f(x)>M$ ***per qualunque*** $x<x_M$.

C) $f(x)<-M$ ***per qualunque*** $x>x_M$.

D) $f(x)<-M$ ***per qualunque*** $x<x_M$.

E) $|f(x)|>M$ ***per qualunque x che soddisfa*** $|x|>x_M$.

53. Esaminare le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to\infty}(3x)=\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}(3x)=+\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty}(3x)=-\infty$$

e risolvere i seguenti quesiti:

- spiegare la differenza fra le tre uguaglianze, basandosi anche sul grafico della funzione data;
- verificare che le uguaglianze sono tutte vere; dire se basta verificare la prima uguaglianza per essere certi che anche le altre due sono vere.

(Tenere presente che la prima uguaglianza afferma solo che, quando x assume valori molto grandi in modulo, anche y assume valori grandi in modulo; non si dà quindi alcuna informazione sul segno di y ...)

54. Ripetere l'esercizio 53, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to\infty}(1-2x)=\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}(1-2x)=-\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty}(1-2x)=+\infty$$

55. Ripetere l'esercizio 53, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to\infty}(4\cdot x^2)=\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}(4\cdot x^2)=+\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty}(4\cdot x^2)=+\infty$$

56. Ripetere l'esercizio 53, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to\infty}(1-x^2)=\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}(1-x^2)=-\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty}(1-x^2)=-\infty$$

57. Ripetere l'esercizio 53, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{x}=\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}=+\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x}=-\infty$$

58. Esaminare le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}=\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x}=+\infty$$

e rispondere ai seguenti quesiti:

- spiegare la differenza fra le tre uguaglianze, basandosi anche sul grafico della funzione data;
- verificare che le uguaglianze **non** sono tutte vere.

59. Ripetere l'esercizio 58, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{1-x}=\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-x}=+\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty}\sqrt{1-x}=+\infty$$

60. Dimostrare che è vera la seguente affermazione:

se risulta $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ risulta anche $\lim\limits_{x\to\infty}[-f(x)]=\infty$

(Tenere presente che risulta $|f(x)|=|-f(x)|$).