Forme indeterminate II. Esercizi

Forme indeterminate del tipo ∞ - ∞, che sono polinomi

Calcola il risultato dei limiti dati negli esercizi da 1 a 6

1. $\lim_{x\to\infty}\left(5x^6-3x^4\right)$, $\lim_{x\to\infty}\left(3x^4-4x^2\right)$, $\lim_{x\to\infty}\left(7x^6-8x^4+2\right)$

2. $\lim_{x\to+\infty}\left(4x^3-2x\right)$, $\lim_{x\to+\infty}\left(2x^5-3x^3\right)$, $\lim_{x\to+\infty}\left(8x^5-3x+4\right)$

3. $\lim_{x\to-\infty}\left(3x^2+2x\right)$, $\lim_{x\to-\infty}\left(3x^4+5x^3\right)$, $\lim_{x\to-\infty}\left(8x^4+3x+5\right)$

4. $\lim_{x\to+\infty}\left(2x^4-\frac{1}{2}\cdot x^2\right)$, $\lim_{x\to-\infty}(x^4+x^3)$, $\lim_{x\to\infty}(3x^3-4x)$

5. $\lim_{x\to\infty}\left(x^4-\frac{5}{4}\cdot x^2+\frac{1}{4}\right)$, $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5}{3}x^3+\frac{2}{3}\cdot x^2-4\right)$, $\lim_{x\to+\infty}\left(2x^3-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right)$

6. $\lim_{x\to\infty}(x^6+x^4-x^2)$, $\lim_{x\to-\infty}(x^5+2x^4+x^2)$, $\lim_{x\to+\infty}(x^5+4x^3-x)$

Forme indeterminate del tipo ∞/∞, che sono quozienti di polinomi

Calcola il risultato dei limiti dati negli esercizi da 7 a 12

7. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4x}{3x^4-2x^3}$, $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-2x^3}{x^2+4x}$, $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2}{9x^2+1}$

8. $\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2+2}{4x^2+5x}$, $\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-3x^2}{2x^3+5x}$, $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+5x}{x^4-3x^2}$

9. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2}{5x^4-4}$, $\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2}{4x^2+25}$, $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^4-4}{2x^3+3x^2}$

10. $\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x^2+3}$, $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{x+1}$, $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+3}{2x^2+1}$

11. $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-x}{5x-3}$, $\lim_{x\to\infty}\frac{5x-3}{3x^3-x}$, $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-x}{2x^3+x^2}$

12. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^4+2x^2+1}$, $\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+2x^2+1}{x^2}$, $\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+2x^2+1}{x^4}$

ESERCIZI SU TUTTO IL TEMA LIMITI E CONTINUITÀ

Sul calcolo di limiti

13. Considerare la funzione $f(x)=\left|e^{2x}-3e^{x}\right|$ e mostrare che:

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

14. Calcolare:

$$\lim_{x\to0} 4\frac{senx\cos x - senx}{x^2}$$

15. Calcolare: $\lim_{x\to\infty} 4x\sin\frac{1}{x}$

16. Calcolare il limite della funzione $\frac{e^{x^3}-1}{xsen^2x}$ quando x tende a 0.

17. Il limite della funzione $y=\frac{\text{sen}x+\cos x}{x}$, quando x tende a $+\infty$,

A. è uguale a 1 **B.** è uguale ad 0 **C.** è infinito
D. è un numero diverso da 0 e da 1 **E.** non esiste.
Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione.

18. È data la funzione

$$y=e^{-\frac{2}{x}}$$

a. Calcolare il limite della funzione per x che tende ad infinito.
b. Calcolare il limite della funzione per x che tende a zero.
c. Tracciare un grafico della funzione compatibile con i risultati ottenuti.

Sulla continuità di una funzione

19. Sono date le funzioni:

(a) $y=\frac{x}{x^2+2x}$ (b) $y=\frac{1}{x+2}$ (c) $y=\frac{x+2}{|x+2|}$

Relativamente a ciascuna funzione, risolvere i seguenti quesiti:

I. Determina il campo di esistenza e traccia il grafico;
II. Indica il tipo di tutte le eventuali discontinuità.

20. Verificare che ha una discontinuità di prima specie (“a salto”) la funzione:

$$f(x)=\frac{1}{3^{\frac{1}{x}}+1}$$

Invece ha una discontinuità di terza specie (“eliminabile”) la funzione:

$$f(x)=\frac{x}{3^{\frac{1}{x}}+1}$$

21. La funzione

$$f(x)=\frac{1}{\left(e^{1/x}-1\right)^2}$$

non è definita nel punto $x = 0$, che è per essa un punto di discontinuità. Si precisi il tipo di questa discontinuità, dopo aver esaminato il limite della f(x) per x tendente a zero da sinistra e per x tendente a zero da destra.

22. Stabilire per quale o quali valori di k è continua in $x = 4$ la funzione

$$h(x)=\begin{cases}3x^2-11x-4, & x\leq 4\\ kx^2-2x-1, & x>4\end{cases}$$

Problemi da risolvere con il calcolo di limiti

23. Esaminare le soluzioni x_1 e x_2 di un'equazione di 2° grado $ax^2+bx+c=0$, con $a>0$ e $b\neq 0$ e verificare che, quando il coefficiente a tende a 0, una soluzione tende ad ∞ e l'altra al valore $-\frac{c}{b}$, soluzione dell'equazione $bx+c=0$.

(Tenere presente che le soluzioni dell'equazione sono date da

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad e \qquad x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Possono dunque aversi due casi:

I) $b>0$ *II)* $b<0$.

Nel primo caso risulta $\lim\limits_{a\to 0} x_1=\infty$*, mentre* $\lim\limits_{x\to 0} x_2$ *si presenta come una forma indeterminata del tipo* $\frac{0}{0}$*. Per risolvere l'indeterminazione si può scrivere*

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})\cdot(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{2a\cdot(-b-\sqrt{b^2-4ac})}=\frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}}$$

e quindi

$$\lim_{a\to 0} x_2=\lim_{a\to 0}\frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}}=-\frac{c}{b}.$$

Procedere in modo analogo nel secondo caso).

24. Visualizzare i risultati ottenuti nell'esercizio precedente, interpretando le soluzioni x_1 e x_2 dell'equazione $ax^2+bx+c=0$ come ascisse dei punti di intersezione della parabola d'equazione $y=ax^2+bx+c$ con l'asse delle x. Per semplicità si può fissare l'attenzione, per esempio, su equazioni della forma $ax^2+4x+3=0$, oppure $ax^2+2x-3=0$.

25. Considerare un cono ed un cilindro circolari retti che hanno le basi e le altezze uguali fra loro; calcolare il limite del rapporto delle superfici totali, al tendere a zero del raggio di base. [1]

26. Trovare il limite dell'angolo interno di un poligono regolare di n lati, quando il numero $n\to\infty$. [Il risultato è π]

27. Dimostrare che il perimetro di un poligono regolare di n lati, inscritto in una circonferenza di raggio r tende alla lunghezza della circonferenza, quando $n \to \infty$.

(Basandosi sulla fig. 6 si trova

$$\overline{AC} = r \cdot sen\,\frac{\pi}{n} \qquad e\ quindi \qquad \overline{AB} = 2r \cdot sen\,\frac{\pi}{n}$$

Perciò il poligono ha il perimetro p_n *dato da*

$$p_n = 2rn \cdot sen\,\frac{\pi}{n}.$$

Per calcolare il $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$, *si considera la funzione*

$$y = sen\,\frac{\pi}{n}$$

come funzione composta di

$$z = \frac{\pi}{n} \qquad e \qquad y = sen\ z.$$

Così risulta anche $n = \frac{\pi}{z}$ *e* p_n *assume la forma seguente*

$$p_n = 2\pi r \cdot \frac{sen\ z}{z}$$

Tenendo infine presente che, quando $n \to \infty$, $z \to 0 \ldots$*)*

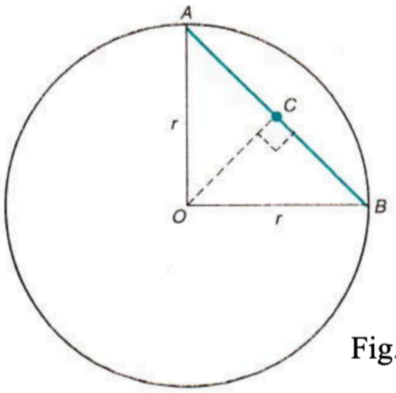

Fig.6

AB lato del poligono
OC apotema
$A\hat{O}B = \frac{2\pi}{n}$ radianti

28. Il segmento AB lungo 1 è diviso in n segmenti uguali (fig. 7) e su ciascuno di essi, preso come base, si è costruito un triangolo rettangolo isoscele, ottenendo una linea spezzata con il perimetro lungo p. Verificare che, quando $n \to \infty$, p non tende ad 1, anche se la spezzata "tende a confondersi" con il segmento AB.

(Si trova che $p \to \sqrt{2}$*).*

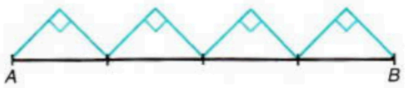

Fig. 7

29. Il segmento AB lungo 1 è diviso in n segmenti uguali (fig. 8) e su ciascuno di essi, preso come diametro, si è costruito un semicerchio, ottenendo una linea lunga c. Verificare che, quando $n \to \infty$, c non tende ad 1, anche se la linea "tende a confondersi" con il segmento AB.

(Si trova che $c \to \pi$*).*

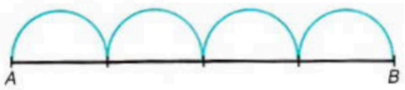

Fig. 8

30. In un riferimento cartesiano Oxy si considera un punto P sull'arco OA di parabola d'equazione $y = x^2$ limitato dai punti O e $A(1, 1)$. Si traccia la retta t tangente alla parabola in A e si valuta la distanza PT del punto P dalla retta t. Determinare il limite del rapporto seguente:

$$\frac{\overline{PA}^2}{\overline{PT}}$$

quando P tende ad A.

(Per valutare le distanze PA e PT, ricordare le seguenti formule:

– *dati* $A(a, b)$ *e* $B(c, d)$, *si ha* $\overline{AB} = \sqrt{(c-a)^2 + (b-d)^2}$

– *dati* $A(a, b)$ *e* $r: y = nx + q$, *si ha* $\overline{Ar} = \dfrac{|b - (ma + q)|}{\sqrt{1 + m^2}}$.

Il risultato è $5\sqrt{5}$*).*