Algebra dei limiti infiniti II

Daniela Valenti, 2021

Quali limiti NON posso calcolare con algebra dei limiti finiti e continuità?

I. Limiti di quozienti con denominatore che tende a 0

ESEMPI

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\boxed{x^2}_{\to 0}} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\boxed{x+2}_{\to 2}}{\boxed{x^2}_{\to 0}}$$

NON posso dividere per 0

II. Limiti per x che tende a infinito

ESEMPI

$$\lim_{x\to+\infty} e^x \qquad \lim_{x\to-\infty} x^3$$

∞ NON è un numero da sostituire ad x

Daniela Valenti, 2021

II. Limiti di funzioni per $x \to \infty$

Questa presentazione tratta il II caso: calcolare limite di una funzione per x che tende a infinito.

Procedimento basato su grafici e tabelle

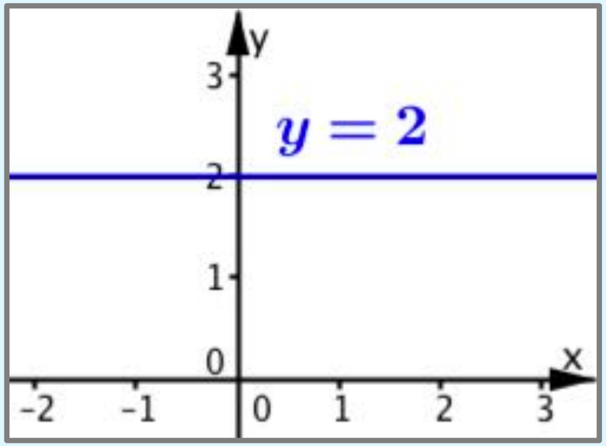
Limiti di funzioni per $x \to \infty$

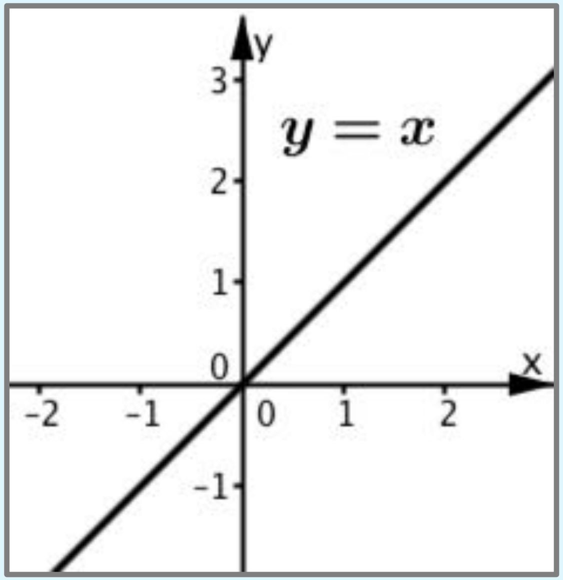
Il procedimento è strutturato in due passi:

1. **valuto i limiti di funzioni elementari;**
2. **completo l’algebra dei limiti infiniti.**

Limiti di funzioni elementari

Funzione del tipo *y* = *k*, con *k* numero reale

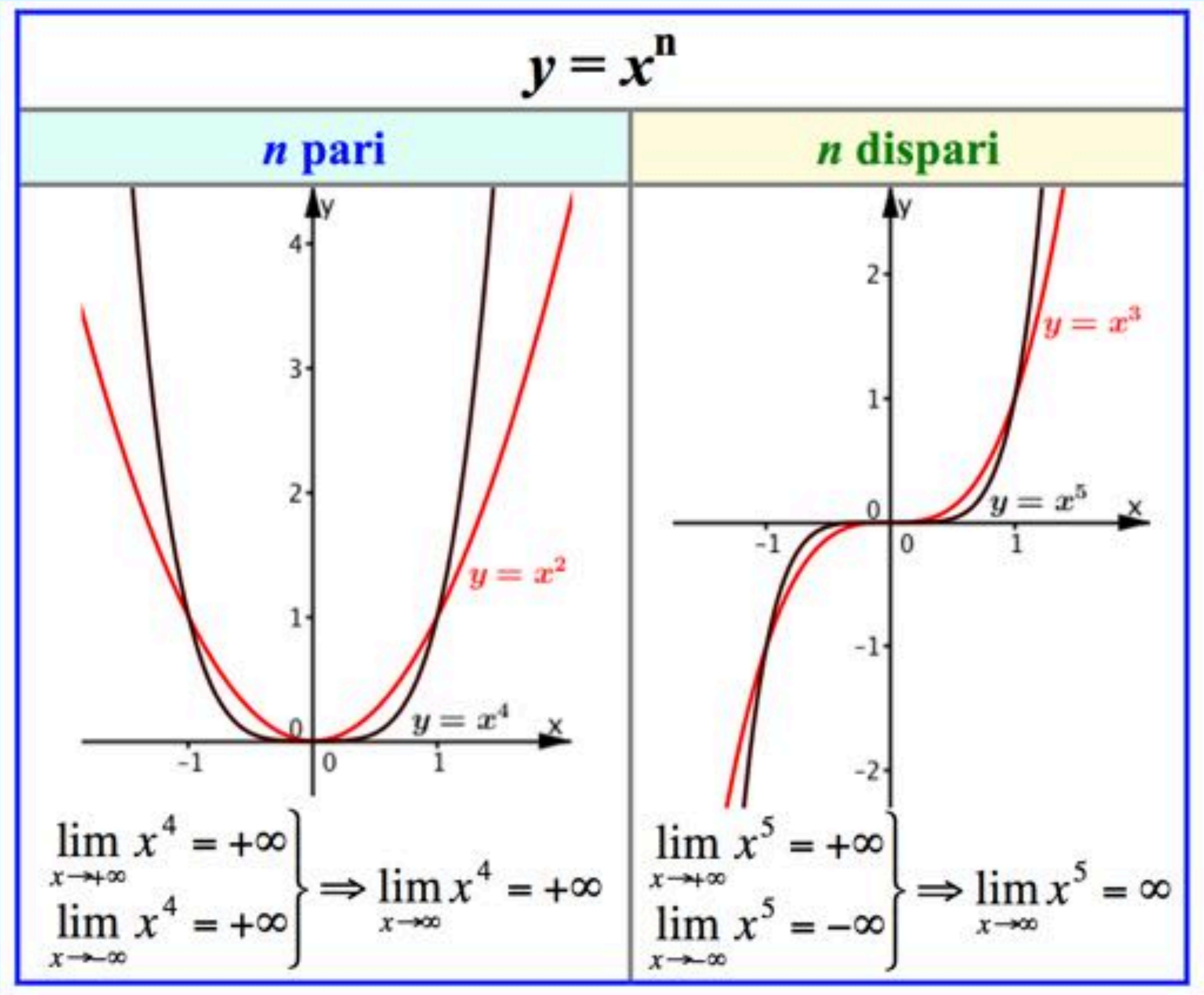




$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 2 = 2\\ \lim\limits_{x\to-\infty} 2 = 2\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} 2 = 2$$

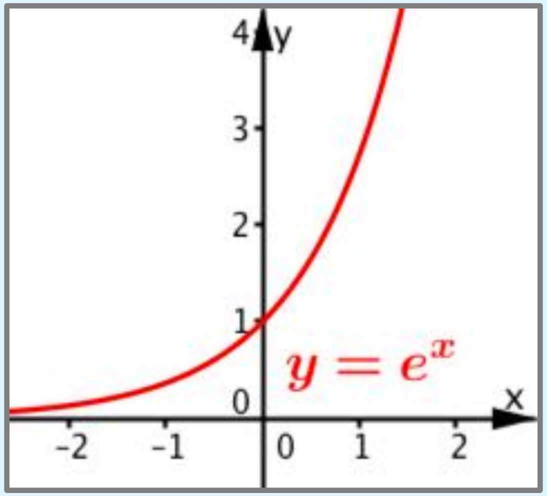
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} x = \infty$$

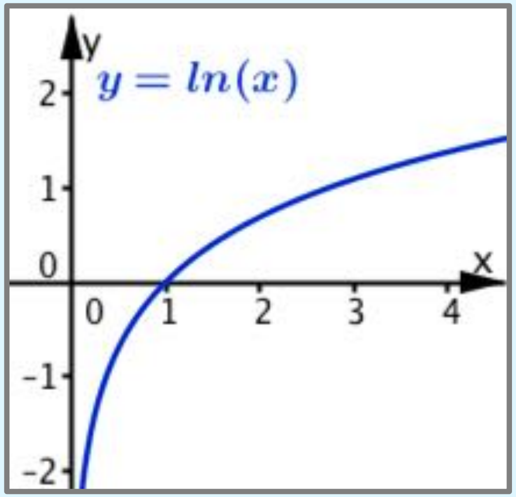
Limiti di funzioni elementari



Daniela Valenti, 2021

Limiti di funzioni elementari





$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

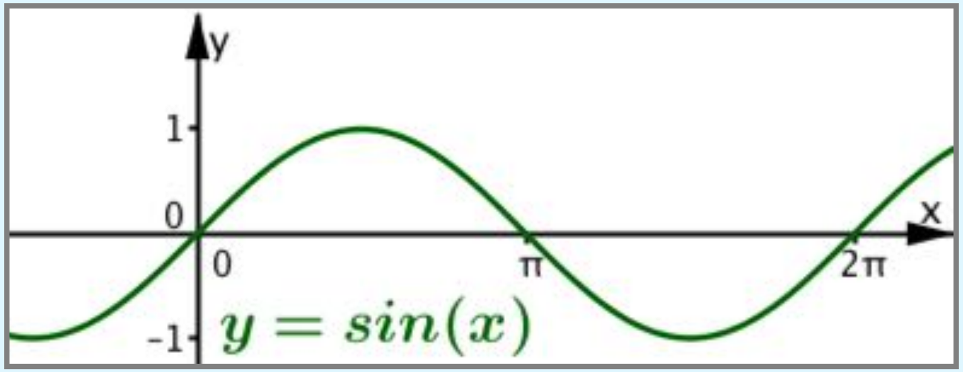
$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

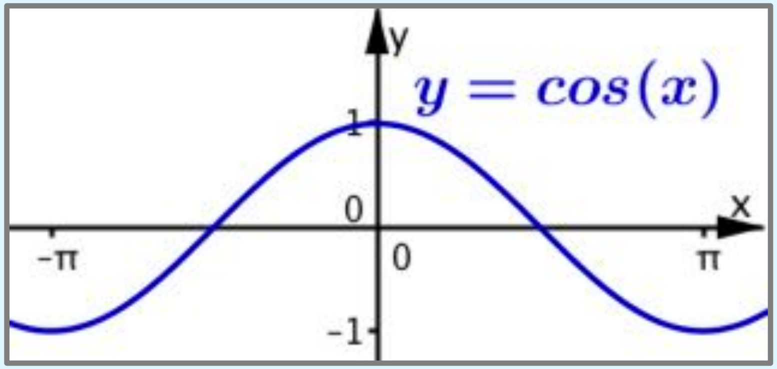
$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$$

Non posso calcolare $\lim_{x \to -\infty} \ln(x)$

Daniela Valenti, 2021

Limiti di funzioni elementari





$$\left.\begin{array}{l}\text{Non esiste } \lim\limits_{x\to+\infty} \sin(x) \\ \text{Non esiste } \lim\limits_{x\to-\infty} \sin(x)\end{array}\right\} \Rightarrow \text{Non esiste} \lim\limits_{x\to\infty} \sin(x)$$

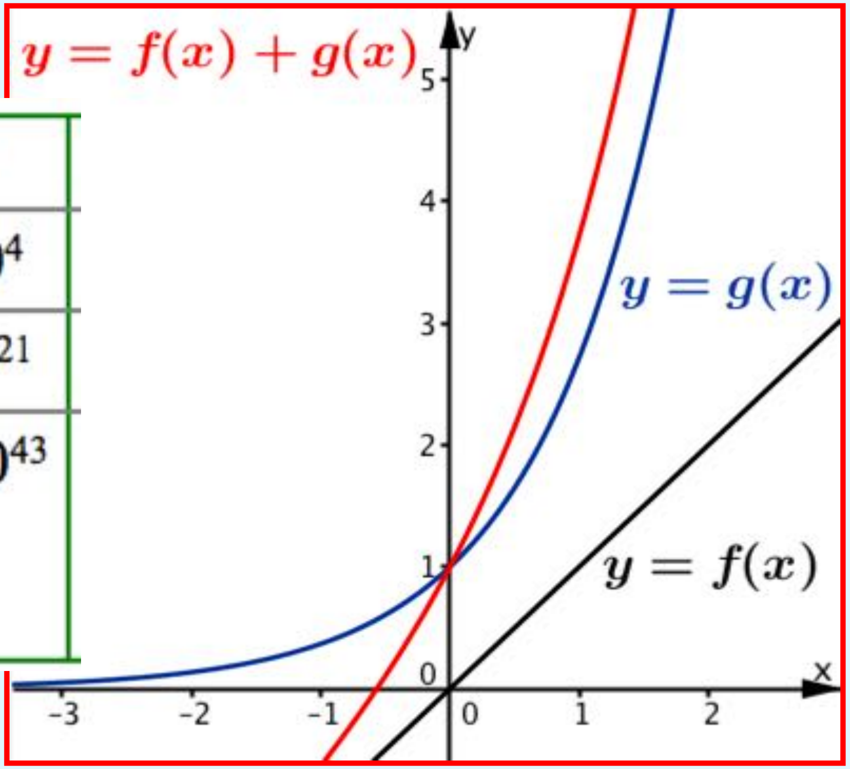
$$\left.\begin{array}{l}\text{Non esiste } \lim\limits_{x\to+\infty} \cos(x) \\ \text{Non esiste } \lim\limits_{x\to-\infty} \cos(x)\end{array}\right\} \Rightarrow \text{Non esiste} \lim\limits_{x\to\infty} \cos(x)$$

Grafici e tabelle per continuare a scoprire l’algebra dei limiti infiniti

Somma di funzioni che tendono a infinito

ESEMPIO

x	$f(x)=x$	$g(x)=e^x$	$f(x)+g(x)$
10	10	$2{,}2\cdot 10^4$	$10+2{,}2\cdot 10^4$
50	50	$5{,}2\cdot 10^{21}$	$50+5{,}2\cdot 10^{21}$
100 $\downarrow$ $+\infty$	100 $\downarrow$ $+\infty$	$2{,}7\cdot 10^{43}$ $\downarrow$ $+\infty$	$100+2{,}7\cdot 10^{43}$ $\downarrow$ $+\infty$



$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(x+e^x\right) = +\infty$$

Somma di funzioni che tendono a infinito

IN GENERALE

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)+g(x)\right]=+\infty$$

Il ragionamento seguito ha carattere elementare:
***‘se addiziono numeri sempre più grandi positivi, ottengo numeri sempre più grandi positivi’*.**
Perciò posso ripetere un ragionamento analogo per calcolare il limite di funzioni che si ottengono con altre operazioni algebriche, a partire da due date funzioni.

Prodotto di funzioni che tendono a infinito

Ecco un ragionamento analogo applicato al prodotto di funzioni: *‘se moltiplico numeri sempre più grandi positivi, ottengo numeri sempre più grandi positivi’*.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=+\infty$$

ESEMPIO

x	$f(x)=x$	$g(x)=e^x$	$f(x)\cdot g(x)$
10	10	$2{,}2\cdot 10^4$	$10\cdot 2{,}2\cdot 10^4$
50	50	$5{,}2\cdot 10^{21}$	$50\cdot 5{,}2\cdot 10^{21}$
100 $\downarrow$ $+\infty$	100 $\downarrow$ $+\infty$	$2{,}7\cdot 10^{43}$ $\downarrow$ $+\infty$	$100\cdot 2{,}7\cdot 10^{43}$ $\downarrow$ $+\infty$

La reciproca di una funzione che tende a ∞

Ragiono su un esempio

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}$$

Per valutare questo limite seguo un procedimento basato su grafici, tabelle e il vocabolario matematico richiamato qui sotto.

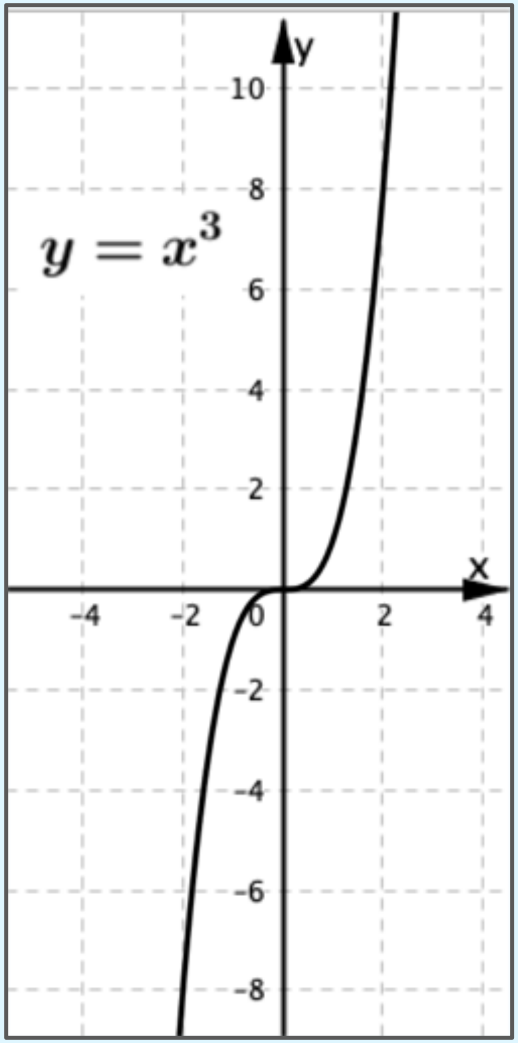
$\frac{1}{x^3}$ è la funzione reciproca di x^3

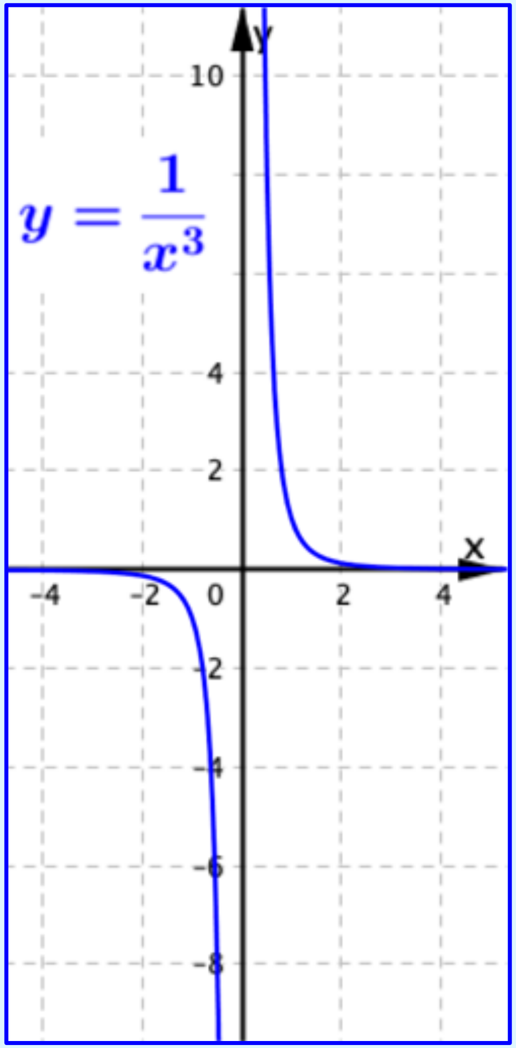
$\frac{1}{8}$ è il numero reale reciproco di 8

Daniela Valenti, 2021

Grafici e tabelle per valutare il limite

x	x^3	$\frac{1}{x^3}$
2	8	$\frac{1}{8}=0{,}125$
10	1000	$\frac{1}{1000}=0{,}001$
100 $\downarrow$ ∞	1000000 $\downarrow$ ∞	$\frac{1}{1000000}=0{,}000001$ $\downarrow$ **0**
∞	∞	**0**
∞ $\uparrow$ -100	∞ $\uparrow$ -1000000	**0** $\uparrow$ $\frac{1}{-1000000}=-0{,}000001$
-10	-1000	$\frac{1}{-1000}=-0{,}001$
-2	-8	$\frac{1}{-8}=-0{,}125$





Scrivo ∞ perché ora non interessa distinguere +∞ da −∞

Daniela Valenti, 2021

Il risultato ottenuto

$$\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^3} = 0$$

Numeri sempre più grandi in modulo...

x	x^3	$\frac{1}{x^3}$
2	8	$\frac{1}{8}=0{,}125$
10	1000	$\frac{1}{1000}=0{,}001$
100 $\downarrow$ ∞	1000000 $\downarrow$ ∞	$\frac{1}{1000000}=0{,}000001$ $\downarrow$ 0
∞	∞	0
∞ $\uparrow$ -100	∞ $\uparrow$ -1000000	0 $\uparrow$ $\frac{1}{-1000000}=-0{,}000001$
-10	-1000	$\frac{1}{-1000}=-0{,}001$
-2	-8	$\frac{1}{-8}=-0{,}125$

... hanno reciproci sempre più vicini a zero.

Una funzione che tende a ∞ e la sua reciproca

Il ragionamento seguito ha carattere generale:

'numeri sempre più grandi in modulo hanno reciproci sempre più vicini a 0'.

Perciò posso scrivere, per qualunque funzione $g(x)$:

$$\lim_{x\to a} g(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{1}{\boxed{g(x)}} = 0$$

∞

Ma ∞ non è un numero

Algebra dei limiti infiniti

Sempre con ragionamenti di tipo grafico – intuitivo arrivo a completare una tabella con le regole dell'algebra dei limiti infiniti.
La tabella consente anche di scrivere al posto della lettera a uno dei simboli $+\infty$, $-\infty$, ∞.

Algebra dei limiti infiniti

$\lim_{x \to a} f(x)$	$\lim_{x \to a} g(x)$	$\lim_{x \to a}\left[f(x)+g(x)\right]$	$\lim_{x \to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]$	$\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)}$	$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$
$m \neq 0$	∞	∞	∞	0	0
∞	$p \neq 0$	∞	∞	$\frac{1}{p}$	∞
0	∞	∞	?	0	0
∞	0	∞	?	∞	∞
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0	?
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	?
$+\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$	0	?

I punti interrogativi ? segnalano le forme indeterminate

Daniela Valenti, 2021

Quali limiti NON posso calcolare solo con l'algebra dei limiti finiti e infiniti?

I limiti che si presentano in forma indeterminata:

$$\lim_{x\to a}\left[\overset{+\infty}{\boxed{f(x)}}-\overset{+\infty}{\boxed{g(x)}}\right]$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\boxed{f(x)}\to\infty}{\boxed{g(x)}\to\infty}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\boxed{f(x)}\to 0}{\boxed{g(x)}\to 0}$$

$$\lim_{x\to a}\left[\underset{0}{\boxed{f(x)}}\cdot\underset{\infty}{\boxed{g(x)}}\right]$$

Le prossime due lezioni sono dedicate a procedimenti per calcolare limiti anche di forme indeterminate.

Attività

Completa la scheda di lavoro per approfondire e applicare l'algebra dei limiti infiniti.

Che cosa hai trovato

Quesito A

Le motivazioni possono essere espresse in vari modi, fra i quali quelli presentati qui.

Limiti	Motivazione grafico - intuitiva
$\lim_{x \to -\infty} \left[\underbrace{\boxed{x^2}}_{+\infty} + \underbrace{\boxed{e^x}}_{0} \right] = +\infty$	Sono numeri grandi positivi le somme di numeri grandi positivi con numeri vicini a 0
$\lim_{x \to +\infty} \left[\underbrace{\boxed{x^2}}_{+\infty} - \underbrace{\boxed{e^x}}_{+\infty} \right]$	Forma indeterminata del tipo ∞ - ∞
$\lim_{x \to +\infty} \left[\underbrace{\boxed{x^2}}_{+\infty} \cdot \underbrace{\boxed{e^x}}_{+\infty} \right] = +\infty$	Sono numeri grandi positivi i prodotti di numeri sempre più grandi posititivi
$\lim_{x \to -\infty} \left[\underbrace{\boxed{x^2}}_{+\infty} \cdot \underbrace{\boxed{e^x}}_{0} \right]$	Forma indeterminata del tipo ∞ · 0

Quesito A

Limiti	Motivazione grafico - intuitiva
$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\boxed{x^2}}=0$, $x^2 \to +\infty$	Si avvicinano a 0 i reciproci di numeri positivi sempre più grandi
$\lim_{x\to-\infty}\frac{\boxed{e^x}}{\boxed{x^2}}=0$, $e^x \to 0$, $x^2 \to +\infty$	Si avvicinano a 0 i quozienti di numeri vicini a 0 divisi per numeri grandi positivi.
$\lim_{x\to-\infty}\frac{\boxed{x^2}}{\boxed{e^x}}=\infty$, $x^2 \to +\infty$, $e^x \to 0$	È il reciproco di un quoziente che tende a 0
$\lim_{x\to+\infty}\frac{\boxed{x^2}}{\boxed{e^x}}$, $x^2 \to +\infty$, $e^x \to +\infty$	È una forma indeterminata del tipo ∞/∞

Quesito B

B. È data la funzione

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

1. Scrivi il risultato dei seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\boxed{\frac{1}{x}}\nearrow 0} = 1 \qquad \lim_{x\to-\infty} e^{\boxed{\frac{1}{x}}\nearrow 0} = 1 \qquad \lim_{x\to 0^+} e^{\boxed{\frac{1}{x}}\nearrow +\infty} = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} e^{\boxed{\frac{1}{x}}\nearrow -\infty} = 0$$

2. Traccia un grafico di $f(x)$ compatibile con i risultati scritti.