Proprietà delle funzioni continue in un intervallo. Esercizi

Sul teorema di Weierstrass

Gli esercizi da 1a 7 conducono a riflettere sul teorema di Weierstrass che afferma: ***una funzione continua in un intervallo chiuso [a, b] ammette sempre un massimo e un minimo.***

1. Esaminare la funzione $f(x)=\frac{1}{x-2}$ nell'intervallo $[1, 3]$ e verificare che la funzione non ammette né massimo, né minimo assoluto.
Spiegare perché questa situazione non contraddice il teorema di Weierstrass.

2. Esaminare la funzione $y=\ln x$ nell'intervallo $[0; 1]$ e verificare che la funzione è continua, ammette il massimo assoluto, ma non ammette il minimo assoluto.
Spiegare perché questa situazione non contraddice il teorema di Weierstrass.

3. Esaminare la funzione $f(x)=\frac{1}{x+1}$ nell'intervallo $[-1, 0]$ e verificare che la funzione è continua, ammette il minimo assoluto, ma non ha il massimo assoluto.
Spiegare perché questa situazione non contraddice il teorema di Weierstrass.

4. Esaminare la funzione continua $y=\text{sen}\, x$ nell'intervallo aperto $[0, \pi]$ e verificare che la funzione ammette sia il massimo che il minimo assoluto.
Spiegare perché questa situazione non contraddice il teorema di Weierstrass.

5. Esaminare la funzione $y=[x]$ nell'intervallo $[0, 2]$ e verificare che la funzione non è continua nell'intervallo, ma ammette massimo e minimo assoluti.
Spiegare perché questa situazione non contraddice il teorema di Weierstrass.

6. In ciascuno dei seguenti casi proposti, dire se si può trovare una funzione $y=f(x)$, che soddisfa le proprietà indicate e, in caso affermativo, tracciarne un grafico approssimativo:

I) $y=f(x)$ è continua nell'intervallo aperto $[-1; 4]$ e ammette sia il massimo che il minimo assoluto;

II) $y=f(x)$ è continua nell'intervallo chiuso $[-1; 4]$ ed ammette il massimo assoluto, ma non il minimo assoluto;

III) $y=f(x)$ è definita nell'intervallo chiuso $[-1; 4]$, ammette massimo e minimo assoluto, ma non è continua in tutti i punti dell'intervallo.

7. Verificare che il teorema di Weierstrass può essere anche enunciato nel modo seguente: una funzione continua definita in un intervallo chiuso ha come immagine un intervallo chiuso.

Sul teorema dell'esistenza degli zeri

Gli esercizi da 8 a 15 conducono a riflettere sul teorema dell'esistenza degli zeri che afferma: ***se una funzione è continua in un intervallo chiuso [a, b] e risulta che f(a) e f(b) hanno segno opposto, è sempre possibile trovare nell'intervallo [a, b] almeno uno zero c della funzione.***

8. Esaminare la funzione $f(x)=\frac{1}{x}$ nell'intervallo $[-1, 1]$ e verificare che

– risulta $f(-1)=-1$ e $f(1)=1$,
– non esiste nessun valore c tale che risulti $f(c)=0$.

Spiegare perché questa situazione non contraddice il teorema dell'esistenza degli zeri.

9. Esaminare la funzione $f(x)=x^2-2x+1$ nell'intervallo $[0; 2]$ e verificare che esiste all'interno dell'intervallo il valore 1, per cui risulta

$$f(1)=0,$$

ma $f(0)$ e $f(2)$ hanno lo stesso segno.
Spiegare perché questa situazione non contraddice il teorema dell'esistenza degli zeri.

10. Esaminare la funzione $f(x)=\text{tg}\, x$ nell'intervallo $(0; 2\pi)$ e verificare che esiste all'interno dell'intervallo il valore π, per cui risulta

$$f(\pi)=0,$$

anche se la funzione è considerata in un intervallo aperto e ivi discontinua.
Spiegare perché questa situazione non contraddice il teorema dell'esistenza degli zeri.

11. In ciascuno dei seguenti casi proposti, dire se si può trovare una funzione $y=f(x)$, che soddisfa le proprietà indicate e, in caso affermativo, tracciarne un grafico approssimativo:

I) $y=f(x)$ è continua nell'intervallo chiuso $[0; 3]$ e risulta

$$f(0)=2, \quad f(3)=-1 \quad \text{e} \quad f(1)=f(2)=0;$$

II) $y=f(x)$ è continua nell'intervallo chiuso $[0; 3]$ e risulta

$$f(0)=2, \quad f(3)=-1 \quad \text{e} \quad f(x)\neq 0 \quad \text{per qualunque } x \text{ nell'intervallo } [0; 3];$$

III) $y=f(x)$ è definita nell'intervallo chiuso $[0; 3]$ e risulta

$$f(1)=f(2)=0, \quad f(0)=2 \quad \text{e} \quad f(3)=4.$$

12. Dimostrare che l'equazione

$$e^x-x^2=0$$

ammette almeno una soluzione nell'intervallo $[-2; 0]$.

(Basta esaminare la funzione $f(x)=e^x-x^2$ e verificare che è continua in $[-2, 0]$ e risulta

$$f(-2)<0 \quad e \quad f(0)>0.)$$

13. Esaminare i seguenti polinomi:

$$y=2x-1, \quad y=-4x^2+3x+1, \quad y=x^3+x^2-4x-4, \quad y=-x^4+x^2+2$$

e verificare che presentano tutti le seguenti caratteristiche:

- hanno il primo e l'ultimo coefficiente di segno opposto,
- risulta $y=0$ in corrispondenza ad almeno un valore positivo di x.

Dimostrare che, in generale, per un polinomio del tipo

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n,$$

se risulta $a_0a_n<0$, allora esiste almeno un valore $c>0$, per cui risulta

$$f(c)=0.$$

14. Esaminare i seguenti polinomi:

$$y=x-1, \quad y=x^3+3x^2+3x+1, \quad y=x^5+x^3-2x$$

e verificare che presentano tutti le seguenti caratteristiche:

- sono in grado dispari,
- risulta $y=0$ in corrispondenza ad almeno un valore reale di x.

Dimostrare che, in generale, un polinomio di grado dispari ammette sempre almeno uno zero reale.

15. Esaminare i seguenti polinomi:

$$y=x^2+1, \quad y=4x^2-1, \quad y=x^4-3x^2+2, \quad y=x^6-x^2$$

e verificare che presentano tutti le seguenti caratteristiche:

- sono di grado pari,
- l'equazione $y=0$ ha un numero pari di soluzioni reali (oppure non ha soluzioni reali).

Dimostrare che, in generale, un polinomio di grado pari ammette sempre un numero pari di zeri reali (oppure non si annulla mai).