Limite di una funzione per *x* che tende ad un numero. Esercizi

Limiti di funzioni per *x* che tende a un numero

65. Esaminare le seguenti funzioni:

$$y=\frac{1}{x^2}+1, \qquad y=\frac{1}{x^2}-1, \qquad y=\frac{1}{x^4}$$

Descrivere il comportamento di y quando si assegnano ad x valori sempre più vicini a 0 valendosi di:

- una tabella,
- un grafico,
- una frase,
- simboli matematici.

(L'esercizio porta a ripetere il procedimento esposto nel paragrafo 5 di questo capitolo; per esempio, nel 1° caso si può procedere così:

- *si compila una tabella come quella di fig. 8,*
- *si traduce la tabella in un grafico come quello di fig. 8,*
- *si dice che: «assegnando ad x valori sempre più vicini a 0, y assume valori positivi sempre più grandi»,*
- *si scrive* $\lim_{x\to 0} y=+\infty$, *ossia* $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}+1\right)=+\infty$).

x	y
⋮	
−0,5	5
−0,1	101
−0,01	10001
⋮	⋮
0	non esiste
⋮	⋮
0,01	10001
0,1	101
0,5	5

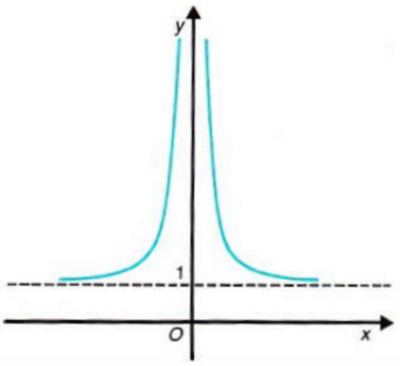


Fig. 8

66. Ripetere l'esercizio 65 a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=-\frac{1}{x^2}+2, \qquad y=-\frac{1}{x^2}-1, \qquad y=-\frac{1}{x^4}$$

67. Ripetere l'esercizio 65, a partire dalle seguenti funzioni, assegnando ad x valori sempre più vicini ad 1:

$$y=\frac{1}{(x-1)^2}, \qquad y=\frac{1}{(x-1)^2}+3, \qquad y=\frac{1}{(x-1)^4}$$

68. Ripetere l'esercizio 65, a partire dalle seguenti funzioni, assegnando ad x valori sempre più vicini a -2:

$$y=\frac{1}{(x+2)^2}, \qquad y=\frac{1}{(x+2)^2}-4, \qquad y=\frac{1}{(x+2)^4}$$

69. Ripetere l'esercizio 68, a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=-\frac{1}{(x+2)^2}, \qquad y=-\frac{1}{(x+2)^2}+4, \qquad y=-\frac{1}{(x+2)^4}$$

70. Esaminare le seguenti funzioni:

$$y=\frac{x^4}{x^2}, \qquad y=x^2, \qquad y=\frac{x^4+2x^2}{x^2}, \qquad y=x^2+2$$

Descrivere il comportamento di y quando si assegnano ad x valori sempre più vicini a 0 valendosi di:

- una tabella,
- un grafico,
- una frase,
- simboli matematici.

Spiegare perché la prima funzione è diversa dalla seconda e la terza è diversa dalla quarta.

71. Ripetere l'esercizio 70 a partire dalle seguenti funzioni, assegnando ad x valori sempre più vicini a 1:

$$y=\frac{x^2-1}{x-1}, \qquad y=x+1, \qquad y=\frac{x^3-1}{x-1}, \qquad y=x^2+x+1$$

72. Ripetere l'esercizio 70 a partire dalle seguenti funzioni, assegnando ad x valori sempre più vicini a -1:

$$y=\frac{x^3+1}{x+1}, \qquad y=x^2-x+1, \qquad y=\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x+1}, \qquad y=x^2+2x+1$$

73. Esaminare le seguenti funzioni:

$$y=\frac{x^3-x^2}{x^2-x}, \qquad y=\frac{x+2}{x^2+2x}, \qquad y=\frac{x^4-1}{x^2-1}$$

e, relativamente a ciascuna funzione, rispondere ai seguenti quesiti:

I) determinare il campo di esistenza;
II) descrivere il comportamento di y, quando si assegnano ad x valori sempre più vicini a quelli esclusi dal campo di esistenza, valendosi di:

- tabelle,
- grafici,
- frasi,
- simboli matematici.

74. Ripetere l'esercizio 73, a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=\frac{x+1}{x^2-1}, \qquad y=\frac{x^2-1}{x+1}, \qquad y=\frac{x^2-4x+4}{x+2}, \qquad y=\frac{x+2}{x^2-4x+4}$$

75. Ripetere l'esercizio 73, a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=\frac{4x^2-4x+1}{4x^2-1}, \qquad y=\frac{4x^2-1}{4x^2-4x+1}, \qquad y=\frac{x^3-4x}{x^2-4}, \qquad y=\frac{x^2-4}{x^3-4x}$$

76. Esprimere a parole e visualizzare graficamente le seguenti formule:

$$\lim_{x\to 1} y=+\infty, \quad \text{ossia} \quad \lim_{x\to 1} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1} y=-\infty, \quad \text{ossia} \quad \lim_{x\to 1} f(x)=-\infty$$

(Per esempio, la prima formula si può leggere così: «la funzione $y=f(x)$ presenta la seguente caratteristica: assegnando ad x valori sempre più vicini a 1, si ottengono corrispondenti valori di y positivi sempre più grandi». La curva di fig. 9 mostra un esempio di grafico di funzione che si comporta secondo la formula assegnata).

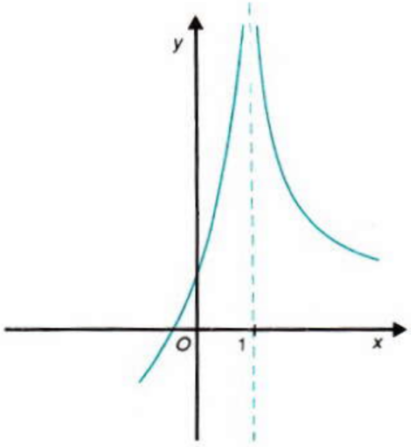


Fig. 9

77. Ripetere l'esercizio 76, a partire dalle seguenti formule:

$$\lim_{x\to 1} y=0, \quad \text{ossia} \quad \lim_{x\to 1} f(x)=0$$

$$\lim_{x\to 0} y=1, \quad \text{ossia} \quad \lim_{x\to 0} f(x)=1$$

Matematica e fisica

In fisica s'incontrano spesso delle leggi che legano due grandezze variabili e che hanno questa caratteristica: la legge perde significato in corrispondenza ad uno o più valori della variabile indipendente. Ecco due esempi.

1) La teoria della relatività ristretta

La relatività prevede un fenomeno molto lontano dall'intuizione: una particella in movimento ha una massa che varia al variare della sua velocità secondo la legge

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad (1)$$

dove

m indica la massa della particella che varia al variare della velocità v,
m_0 indica la massa a riposo,
c indica la velocità della luce nel vuoto (che vale circa 300.000 km/sec).

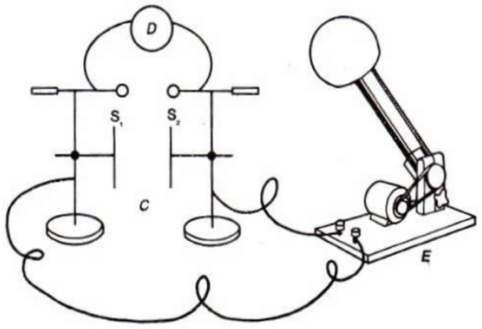
Si osserva subito che questa legge perde significato quando vale 0 il suo denominatore e ciò succede quando risulta $v=c$, quando cioè la particella arriva alla velocità della luce.

Ora, gli acceleratori di particelle portano gli elettroni a velocità prossime a quelle della luce, permettendo di verificare sperimentalmente la validità della legge (1). Diventa perciò molto importante prevedere che cosa succede quando una particella viene accelerata fino a raggiungere velocità sempre più vicine a quella della luce: si capisce che il denominatore diventa sempre più piccolo e, quindi, il valore di m sempre più grande, ma non possiamo dire nulla, quando risulta $v=c$, perché la (1) perde significato.

2) La scarica nei gas

I fulmini offrono l'esempio più spettacolare di scarica elettrica in un gas. Questo fenomeno può essere riprodotto in laboratorio (fig. 33), caricando elettrostaticamente due sfere S_1 e S_2 tenute ad opportuna distanza. In tal caso è interessante rilevare con un voltmetro la differenza di potenziale che si stabilisce fra le sfere, man mano che vengono caricate.

Riportando i dati su un grafico, si ottiene un disegno come quello di fig. 34: la differenza di potenziale V aumenta al variare del tempo t, fino a raggiungere il valore V_0, detto **potenziale esplosivo**; a questo punto scocca la scintilla e la tensione V ritorna bruscamente a 0.



E=generatore di alte tensioni
C=condensatore di grande capacità
D=voltmetro elettrostatico

Fig. 33

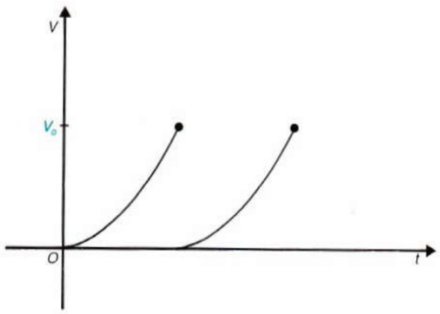


Fig. 34

Se si continuano a caricare le sfere il fenomeno si ripete; si osservano quindi sul grafico tanti punti critici, in corrispondenza degli istanti in cui avviene la scarica. È chiaro che nulla si può dire sul valore della tensione V in quegli istanti. I due fenomeni presentati conducono a studiare delle funzioni da un particolare punto di vista: si esamina il comportamento della funzione, quando si assegnano ad una delle variabili valori sempre più vicini ad un dato numero

Altri fenomeni fisici

78. Per studiare il comportamento di un gas mantenuto a temperatura costante, si può, in prima approssimazione, considerare il gas come se fosse composto di molecole puntiformi; in tal caso la pressione P varia al variare del volume V occupato dal gas secondo la legge seguente

$$P=\frac{k}{V}$$

dove k è una costante.
In quale situazione la legge perde significato?

79. Se si vuole studiare un gas tenendo conto del fatto che le sue molecole non sono punti, ma "palline" che occupano un certo volume, si ha la legge seguente

$$P=\frac{k}{V-b}$$

dove k e b sono due costanti.
In quale caso la legge perde significato?
Quale differenza si rileva fra questa legge e quella indicata nell'esercizio precedente?

80. La velocità di fuga di un satellite artificiale dall'attrazione di un corpo celeste è data da

$$v=\sqrt{\frac{2\cdot G\cdot M}{R}}$$

dove G è una costante, M ed R indicano la massa ed il raggio del corpo celeste.
In quale caso la legge perde significato?