# Limite di una funzione per $x$ che tende ad infinito. Esercizi

## Da fenomeni reali al comportamento di una curva all'infinito

**1.** Si può studiare la velocità di una pallina lasciata cadere da una certa altezza in due situazioni differenti:

a) Caduta libera nel vuoto.
La velocità $v$ varia al passare del tempo $t$ secondo la legge (fig. 1)

$$v=gt,$$

dove $g$ è una costante.

b) Caduta libera nell'aria.
La velocità $v$ varia al passare del tempo $t$ secondo la legge (fig. 2)

$$v=A\cdot(1-e^{-b\cdot t})$$

dove $A$ e $b$ sono due costanti.

Esaminare le due situazioni e rispondere ai seguenti quesiti:

– in quale caso la velocità cresce al crescere del tempo?
– in quale caso la velocità diventa sempre più grande al passare del tempo?
– in quale caso la velocità aumenta senza riuscire a superare un valore limite?

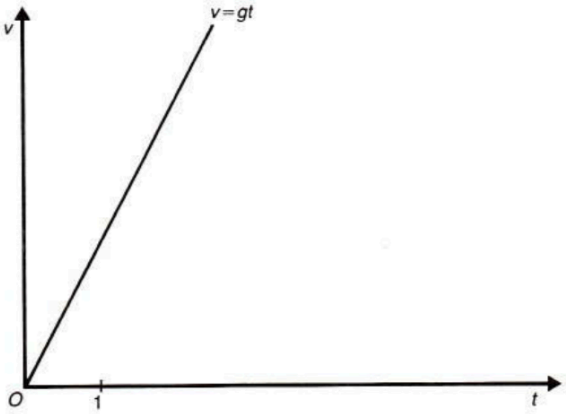


Fig. 1

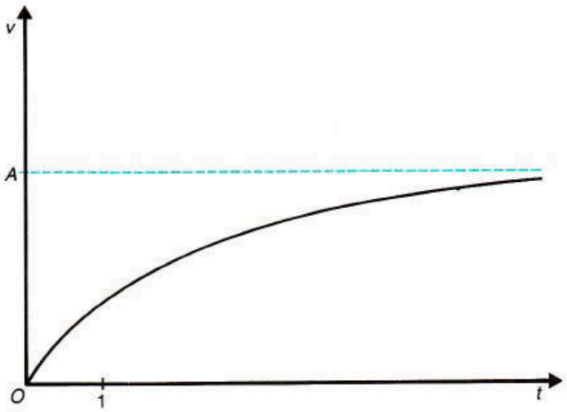


Fig. 2

**2.** Si può studiare il passaggio di corrente in un conduttore collegato ad una batteria da due punti di vista diversi:

a) Senza tener conto del fenomeno dell'autoinduzione.
In tal caso si dice che il conduttore è sempre attraversato da una corrente, che ha un'intensità $I$, data da

$$I=\frac{V}{R}$$

dove $V$ ed $R$ sono due valori costanti che indicano la tensione applicata al conduttore e la sua resistenza.

b) Tenendo conto del fenomeno dell'autoinduzione.
In questo caso si trova che la corrente $I$ varia al passare del tempo $t$ secondo la legge

$$I=A\cdot(1-e^{-b\cdot t})$$

dove $b$ è una costante, mentre la costante $A$ è data da

$$A=\frac{V}{R}$$

Confrontare le due leggi rappresentandole graficamente; fermare l'attenzione sull'andamento delle due curve per valori molto grandi del tempo.
*(Per il grafico della seconda legge, tenere presente la fig. 2).*

**3.** In fig. 3 sono riportate delle curve ottenute sperimentalmente, studiando la concentrazione $C$ di penicillina nel sangue al passare del tempo $t$, a partire da diverse dosi iniziali. Che cosa si può dire dell'andamento della concentrazione $C$, quando il tempo assume valori molto grandi?

**4.** La fig. 4 è tratta da uno studio del 1980 sulla formazione delle galassie: la curva rappresenta l'andamento della luminosità $L$ di un ammasso di stelle al variare del tempo $t$. Interpretare il grafico, fissando l'attenzione sull'andamento di $L$ per valori molto grandi del tempo $t$.

**5.** Tradurre graficamente le seguenti considerazioni tratte da un testo di economia politica: l'osservazione ci dice che, col crescere della quantità disponibile di un bene, aumenta la soddisfazione complessiva che da esso si può trarre. L'accrescimento della soddisfazione tuttavia ha un limite: la saturazione del bisogno.

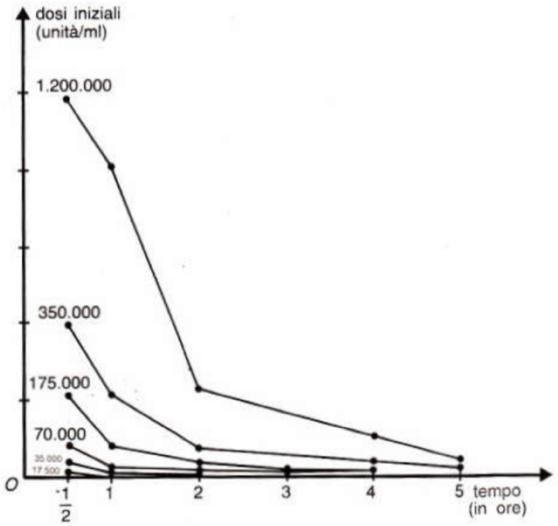


Fig. 3. Curve della concentrazione di penicillina nel sangue in casi di somministrazione di diverse dosi iniziali.

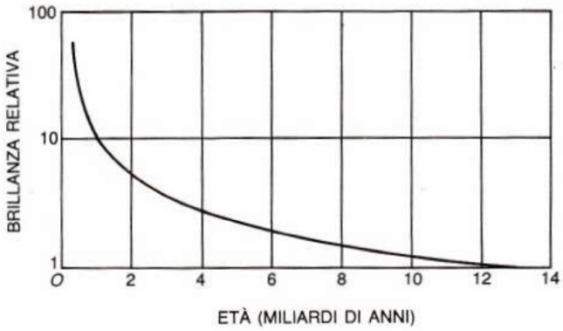


Fig. 4. La luminosità di un ammasso di stelle è massima all'atto della sua formazione per la presenza di molte stelle massicce brillanti. Quando queste stelle a vita breve si estinguono, la luminosità dell'ammasso diminuisce rapidamente. La "brillanza relativa" è calcolata dividendo la luminosità di una popolazione di stelle per la luminosità all'età di 13 miliardi di anni, l'età della Galassia.

## Dai modelli allo studio matematico

**6.** Esaminare le seguenti funzioni:

$$y=x-3, \qquad y=-x-3, \qquad y=\frac{1}{x}-3, \qquad y=-\frac{1}{x}-3$$

Descrivere il comportamento di $y$ quando si assegnano ad $x$ valori positivi sempre più grandi valendosi di:

- una tabella,
- un grafico,
- una frase,
- simboli matematici.

*(L'esercizio porta a ripetere il procedimento esposto nel paragrafo 2 di questo capitolo; per esempio, nel 1° caso si può procedere così:*

- *si compila una tabella come quella di fig. 5,*
- *si traduce la tabella in un grafico come quello di fig. 5,*
- *si dice che «assegnando ad x valori positivi sempre più grandi, y assume valori positivi sempre più grandi»,*
- *si scrive* $\lim_{x\to+\infty} y=+\infty$, *ossia* $\lim_{x\to+\infty}(x-3)=+\infty$.*)*

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | −3 |
| 4 | 1 |
| ⋮ | ⋮ |
| 10 | 7 |
| ⋮ | ⋮ |
| 100 | 97 |
| 1000 | 997 |
| ⋮ | ⋮ |
| $+\infty$ | $+\infty$ |

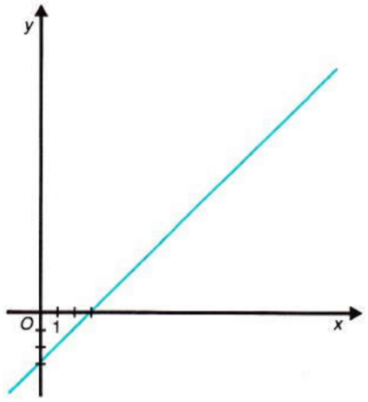


Fig. 5

**7.** Ripetere l'esercizio 6 a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=x^2+1, \quad y=-x^2+1, \quad y=\frac{1}{x^2}+1, \quad y=-\frac{1}{x^2}+1$$

**8.** Ripetere l'esercizio 6 a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=x^3-1, \quad y=-x^3-1, \quad y=\frac{1}{x^3}-1, \quad y=-\frac{1}{x^3}+1$$

**9.** Ripetere l'esercizio 6 a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=e^x, \quad y=-e^x, \quad y=e^{-x}, \quad y=-e^{-x}$$

**10.** Ripetere l'esercizio 6, a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=\cos x, \quad y=\operatorname{tg} x, \quad y=\arccos x, \quad y=\operatorname{arctg} x$$

Riflettere, in particolare, sulle seguenti situazioni descritte nel testo:

I) si può studiare il comportamento della funzione quando si assegnano ad $x$ valori positivi sempre più grandi, ma non esiste il limite della funzione per $x \to +\infty$;

II) non ha senso studiare il comportamento della funzione quando si assegnano ad $x$ valori positivi sempre più grandi, perché il campo di esistenza della funzione è limitato.

Quali delle funzioni assegnate si trovano nella prima situazione?
Quali delle funzioni assegnate si trovano nella seconda situazione?

**11.** Ripetere l'esercizio 6, a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=\sqrt{x}, \quad y=-\sqrt{x}, \quad y=\sqrt{-x}$$

In quale caso non è possibile studiare il comportamento della funzione per $x \to +\infty$?

**12.** Ripetere l'esercizio 6, a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=\sqrt[3]{x}, \quad y=-\sqrt[3]{x}, \quad y=\sqrt[3]{-x}$$

È possibile in tutti e tre i casi studiare il comportamento della funzione per $x \to +\infty$?

**13.** Ripetere l'esercizio 6, a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=\ln x, \quad y=-\ln x, \quad y=\ln(-x)$$

È possibile in tutti e tre i casi studiare il comportamento della funzione per $x \to +\infty$?

**14.** Esprimere a parole e visualizzare graficamente le seguenti formule:

$$\lim_{x\to+\infty} y=-\infty, \quad \text{ossia} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} y=0, \quad \text{ossia} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

*(Per esempio, la prima formula si può leggere così: «la funzione $y=f(x)$ presenta la seguente caratteristica: assegnando ad $x$ valori positivi sempre più grandi, si ottengono corrispondenti valori di $y$ negativi sempre più piccoli». Le curve di fig. 6 mostrano degli esempi di grafici di funzioni che si comportano secondo la prima formula assegnata)*

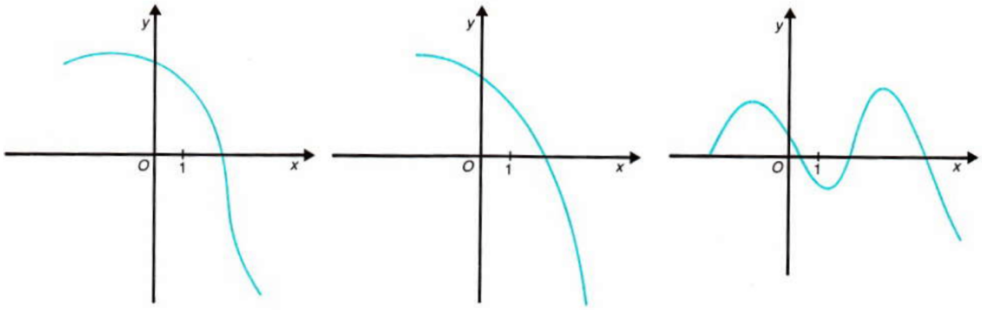


Fig. 6

**15.** Ripetere l'esercizio 14, a partire dalle seguenti formule:

$$\lim_{x\to+\infty} y=+\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} y=10$$

**16.** Ripetere l'esercizio 14, a partire dalle seguenti formule:

$$\lim_{x\to+\infty} y=-5, \quad \lim_{x\to+\infty} y=\ell$$