Integrazione numerica

Affrontiamo il seguente problema: è data una funzione $y=f(x)$, che si mantiene positiva in un intervallo $[a, b]$, e si vuole calcolare (fig. 1)

$$S=\int_a^b f(x)dx,$$

cioè l'area S del trapezoide relativo ad $y=f(x)$, ma non si riesce a trovare una primitiva della funzione. Per esempio, si deve calcolare (fig. 2)

$$S=\int_1^2 \frac{e^x}{x}\,dx$$

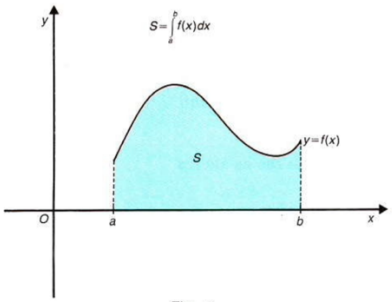

Fig. 1

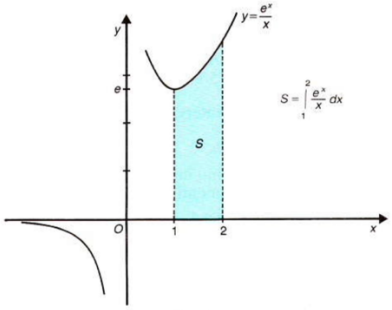

Fig. 2

Il metodo più semplice di risolvere il problema è strettamente legato alla definizione di integrale; si procede nel modo seguente (fig. 3):

- si divide l'intervallo $[a, b]$ in n intervallini uguali, tutti lunghi $h=\frac{b-a}{n}$;
- in ogni intervallo si considera il punto medio, in modo da avere

$$x_1=a+\frac{h}{2}, \qquad x_2=a+3\frac{h}{2}, \qquad x_3=a+5\frac{h}{2}, \ \ldots, \qquad x_n=a+(2n-1)\frac{h}{2};$$

- si calcola

$$\Sigma_n=h\cdot f(x_1)+h\cdot f(x_2)+\ldots+h\cdot f(x_n);$$

- Σ_n viene scelto come valore approssimato dell'area S richiesta.

Con questo procedimento l'area S del trapezoide viene approssimata con l'area Σ_n di una superficie formata da tanti rettangoli (fig. 4); proprio per questo il procedimento prende il nome di **metodo dei rettangoli**.

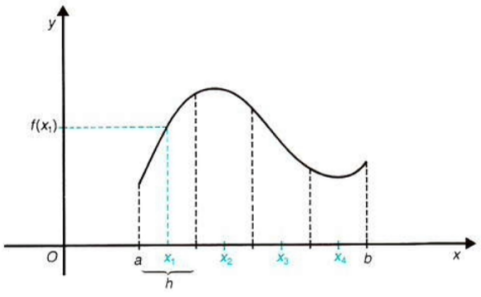

Fig. 3

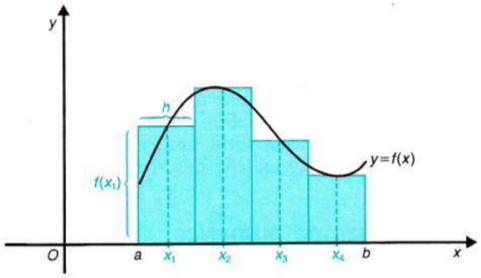

Fig. 4

D'altra parte, richiamando la definizione di integrale

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{h\to 0}\,[h\cdot f(x_1)+h\cdot f(x_2)+\ldots+h\cdot f(x_n)],$$

si capisce che, per avere una buona approssimazione, occorre scegliere h molto vicino a 0 e quindi n molto grande.
Un altro metodo che, in alcuni casi, fornisce delle approssimazioni più soddisfacenti è **il metodo dei trapezi**. Il nome è legato al fatto che si approssima l'area S del trapezoide con l'area T_n di una superficie formata da n trapezi, costruiti nel modo seguente (figg. 5 e 6):

- si divide $[a, b]$ in n intervalli lunghi $h=\dfrac{b-a}{n}$, indicando sull'asse delle x i punti

$$a, \quad x_1=a+h, \quad x_2=a+2h, \quad x_3=a+3h, \ldots, \quad x_n=b=a+nh$$

- relativamente al primo intervallo si calcola l'area A_1 del trapezio che ha altezza h e come basi i segmenti lunghi $f(a)$ e $f(x_1)$, ottenendo

$$A_1=h\cdot\frac{f(a)+f(x_1)}{2}.$$

- si ripete questo calcolo relativamente ai trapezi costruiti sui vari intervalli, ottenendo

$$A_2=h\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}, \ldots, \quad A_n=h\frac{f(x_{(n-1)})+f(b)}{2}$$

- si calcola l'area T_n, somma dell'area dei trapezi, ottenendo

$$T_n=h\cdot\frac{f(a)+f(x_1)+f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})+f(b)}{2}$$

ossia

$$T_n=h\cdot\left(\frac{f(a)}{2}+f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})+\frac{f(b)}{2}\right).$$

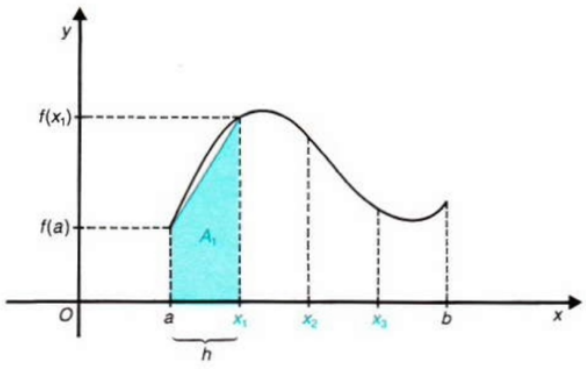

Fig. 5

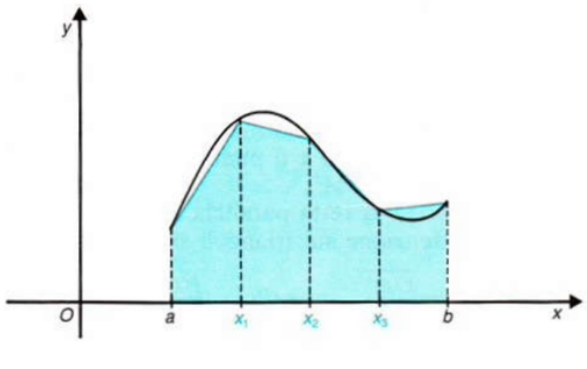

Fig. 6

Vediamo ora i due metodi a confronto per calcolare un'area di cui conosciamo il risultato esatto: per esempio l'area S sotto la parabola d'equazione $y=3x^2$ (fig. 7), nell'intervallo [0, 1]. Sappiamo infatti che risulta

$$S=\int_0^1 3x^2\,dx=[x^3]_0^1=1$$

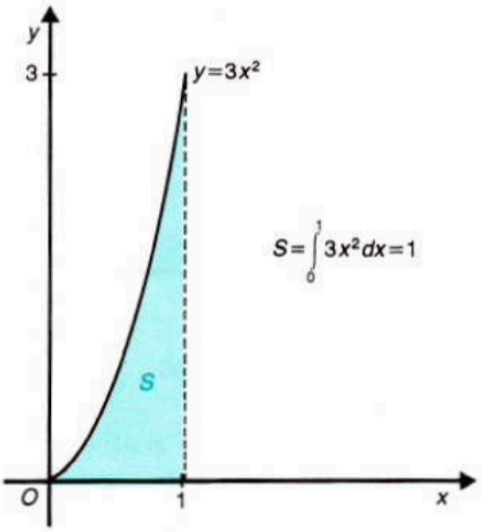

Fig. 7

e possiamo confrontare questo valore con quelli forniti dal metodo dei rettangoli e dal metodo dei trapezi, basandosi sulla tabella seguente.

n	Σ_n	T_n
1	0,75	1,5
2	0,9375	1,125
4	0,984375	1,03125
10	0,9975	1,005

Si osserva dunque che, anche dividendo l'intervallo in sole 10 parti, si arriva ad un risultato dell'integrale abbastanza vicino a quello esatto. Concludiamo l'esame di questi due metodi numerici dando dei valori approssimati dell'integrale indicato all'inizio e cioè

$$S=\int_1^2 \frac{e^x}{x}\,dx$$

Dividendo per esempio l'intervallo [1, 2] in 10 parti, si ottiene:

$\Sigma_{10}=3{,}05834 \qquad T_{10}=3{,}06065.$