Integrali immediati e metodo di scomposizione. Esercizi

Integrali immediati

$F(x)$	$F'(x)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\frac{x^{m+1}}{m+1}$	x^m
Solo se $m \neq -1$	

$\int F'(x)dx = F(x) + k$
$\int \frac{1}{x}dx = ln\|x\| + k$
$\int \frac{x^{m+1}}{m+1}dx = x^m + k$
Solo se $m \neq -1$

1. Completa la seguente tabella

m	x^m	$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + k$
		$\int dx =$
–4		
	$\sqrt[4]{x} = \cdots$	
$\frac{3}{4}$		
$-\frac{1}{4}$		
$-\frac{3}{4}$		

Esercizio risolto

Determina il risultato degli integrali indefiniti assegnati nell'esercizio 2

2. ***A.*** $\int x^3 dx$ ***B.*** $\int \frac{1}{x^3}dx$

A. $\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + k = \frac{x^4}{4} + k$

B. $\int \frac{1}{x^3}dx = \int x^{-3}dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + k = \frac{x^{-2}}{-2} + k = -\frac{1}{2x^2} + k$

Determina il risultato degli integrali indefiniti assegnati negli esercizi da 3 a 6.

3. ***A.*** $\int x^2 dx$ ***B.*** $\int \frac{1}{x^2}dx$

4. ***A.*** $\int x^5 dx$ ***B.*** $\int \frac{1}{x^5} dx$

5. ***A.*** $\int x^6 dx$ ***B.*** $\int \frac{1}{x^6} dx$

6. ***A.*** $\int x dx$ ***B.*** $\int \frac{1}{x} dx$

Esercizio risolto

Determina il risultato degli integrali indefiniti assegnati nell'esercizio 7.

7. ***A.*** $\int \sqrt[3]{x^2} dx$ ***B.*** $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx$ ***C.*** $\int x^\pi dx$

A. $\int \sqrt[3]{x^2} dx = \int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + k = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + k = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + k$

B. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int x^{-\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + k = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + k = 3\sqrt[3]{x} + k$

C. $\int x^\pi dx = \frac{x^{\pi+1}}{\pi+1} + k$

Determina il risultato degli integrali indefiniti assegnati negli esercizi da 8 a 10.

8. ***A.*** $\int \sqrt[4]{x} dx$ ***B.*** $\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}} dx$ ***C.*** $\int x^e dx$

9. ***A.*** $\int \sqrt[4]{x^3} dx$ ***B.*** $\int \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} dx$ ***D.*** $\int x^{\sqrt{2}} dx$

10. ***A.*** $\int \sqrt{x} dx$ ***B.*** $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ ***D.*** $\int x^{2\pi} dx$

Altri integrali immediati

$F(x)$	$F'(x)$
e^x	e^x
$sen(x)$	$cos(x)$
$-cos(x)$	$sen(x)$
$tan(x)$	$1 + tan^2(x)$
$arcsen(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

$\int F'(x)dx = F(x) + k$
$\int e^x dx = e^x + k$
$\int cos(x)dx = sen(x) + k$
$\int sen(x)dx = -cos(x) + k$
$\int [1 + tan^2(x)]dx = tan(x) + k$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arcsen(x) + k$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctan(x) + k$

Scrivi tutte le primitive di ogni funzione assegnata negli esercizi da 11 a 15 e scrivi i risultati ottenuto con il simbolo di integrale indefinito.

11. $y=1,\quad y=x,\quad y=x^3,\quad y=x^4,\quad y=x^6$

12. $y=\frac{1}{x},\quad y=\frac{1}{x^3},\quad y=\frac{1}{x^4},\quad y=\frac{1}{x^5},\quad y=\frac{1}{x^6}$

13. $y=\sqrt{x},\quad y=\sqrt[3]{x},\quad y=\sqrt[4]{x},\quad y=\sqrt[3]{x^2},\quad y=\sqrt[4]{x^3}$

14. $y=\frac{1}{\sqrt{x}},\quad y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}},\quad y=\frac{1}{\sqrt[4]{x}},\quad y=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}},\quad y=\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$

15. $y=\text{sen } x,\quad y=\cos x,\quad y=1+\text{tg}^2 x,\quad y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad y=\frac{1}{x^2+1}$

Metodo di integrazione per scomposizione

$$\int [af(x)+bg(x)]dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$$

Esercizio risolto

Determina il risultato dell'integrale indefinito assegnato nell'esercizio 16.

16. $\int (5x-6)dx$

$$\int (5x-6)dx = 5\int x dx - 6\int dx = 5\frac{x^2}{2} - 6x + k$$

Determina il risultato degli integrali indefiniti assegnati negli esercizi da 17 a 25.

17. $\int (7x^2+3x)dx$ $\qquad$ $\int (5x-3)dx$

18. $\int (8x^3-4x^2)dx$ $\qquad$ $\int \left(\frac{1}{2}x^4+6\right)dx$

19. $\int (9x^2+4)dx$ $\qquad$ $\int (2x^3-7x^2)dx$

20. $\int \left(x+\frac{4}{x}\right)dx$ $\qquad$ $\int \left(x^2-\frac{3}{x^2}\right)dx$

21. $\int \left(3\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$ $\qquad$ $\int \left(4\sqrt[3]{x}+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$

22. $\int [4sen(x)+5\cos(x)]dx$ $\qquad$ $\int \left[\frac{1}{2}sen(x)-\cos(x)\right]dx$

24. $\int [x+2\text{sen}(x)]dx$ $\qquad$ $\int \left[x^2-\frac{1}{4}\cos(x)\right]dx$

25. $\int (3x+e^x)dx$ $\qquad$ $\int \left(\frac{1}{3}e^x+\frac{1}{3x}\right)dx$

Metodo di integrazione per scomposizione esteso a combinazioni lineari di più di due funzioni

Il metodo di scomposizione si può estendere alla combinazione lineare di più di due funzioni che hanno integrali immediati. In questo caso puoi snellire i calcoli con la scrittura seguente.

$$\int [aG'(x) + bH'(x)]dx = aG(x) + bH(x) + k$$

Esercizio risolto

Determina il risultato dell'integrale indefinito assegnato nell'esercizio 26.

26. $\int (5x^3 - 6x^2 + 8x - 4)dx$

$$\int (5x^3 - 2x^2 + 9x - 7)dx = 5\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} + 9\frac{x^2}{2} - 7x + k$$

Determina il risultato degli integrali indefiniti assegnati negli esercizi da 27 a 31

27. $\int (5x^4 + 9x^2 - 4x + 8)dx$ $\int (3x^5 - 2x^3 + 4x^2 - 8)dx$

28. $\int (\mathbf{5x^3 + 9x^2 - 4x + 8})\mathbf{dx}$ $\int \mathbf{(3x^5 - 2x^3 + 4x^2 - 8)dx}$

29. $\int \left(x^2 - 3x + \frac{1}{x}\right)dx$ $\int \left(\frac{2}{3}x^2 + x - \frac{1}{x^2}\right)dx$

30. $\int \left(\sqrt{x} - 2x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$ $\int \left(3x^2 - 2x + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$

31. $\int [+2sen(x) - 3e^x]dx$ $\int [6x^5 - 4\cos(x) + 5e^x]dx$

Gli esercizi dal 32 al 42 conducono a determinare le primitive di una funzione con il seguente procedimento:

I. *applico opportune proprietà algebriche per scrivere la funzione come una combinazione lineare di funzioni che hanno integrali immediati;*
II. *applico il metodo di scomposizione.*

Completa il calcolo degli integrali indefiniti assegnati negli esercizi da 32 a 37.

32. $\int \frac{x^4 - 2x^2 + 3}{x}dx = \int \left(x^3 + 2x + \frac{3}{x}\right)dx =$

33. $\int \frac{2x^3 - 4x^2 + 5}{x^2}dx = \int \left(2x - 4 + \frac{5}{x^2}\right)dx =$

34. $\int tan^2(x)dx = \int (tan^2(x) + 1 - 1)dx =$

35. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \left(1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx =$

36. $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx = \int 1-\frac{1}{1+x^2}dx =$

37. $\int \frac{x^2-1}{1+x^2}dx = \int \frac{1+x^2-2}{1+x^2}dx =$

Calcola il risultato degli integrali assegnati negli esercizi da 38 a 42

38. $\int \frac{4x^3-2x+6}{2x^2}dx$

39. $\int \frac{3x^5-2x^4+x}{x^3}dx$

40. $\int (tan^2(x)+3)dx$

41. $\int \frac{2+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx$

42. $\int \frac{x^2+3}{1+x^2}dx$

Quesiti a risposta multipla sul metodo di scomposizione

Scegli la risposta corretta ai seguenti quesiti.

43. $\int [3sen(x)-2\cos(x)]dx$ è *uguale a*

A. $3\cos(x)+2\text{sen}(x)+k$ **B.** $3\cos(x)-2\text{sen}(x)+k$

C. $-3\cos(x)+2\text{sen}(x)+k$ **D** . $-3\cos(x)-2\text{sen}(x)+k$

44. $\int (3x^5+4x^3+5)dx$ è *uguale a*

A. x^6+x^4+5x+k **B.** $\frac{1}{2}x^6+x^4+5x+k$

C. $\frac{1}{2}x^6+x^4+k$ **D** . $15x^4+12x^2+k$

45. $\int \left(3e^x+\frac{4}{x}\right)dx$ è *uguale a*

A. $3\,x+4\ln|x|+k$ **B.** $3\,e^x+\ln|x|+k$

C. $3\,e^x+4\ln|x|+k$ **D** . $3e^x+2x^2+k$

46. $\int \frac{4x^3 - 3x^2}{2x} dx$ è *uguale a*

A. $x^4 - x^3 + 2\ln|x| + k$ **B.** $\frac{x^4 - x^3}{x^2} + k$

C. $\frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + k$ **D.** $\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + k$

47. $\int \frac{3x^2 - 6x + 1}{3x^2} dx$ è *uguale a*

A. $x - 2\ln|x| - \frac{1}{3x} + k$ **B.** $x - 2\ln|x| + \frac{1}{3x} + k$

C. $\frac{x^3 - 3x^2 + x}{x^3} + k$ **D.** $\mathbf{3}x - 6\ln|x| - \frac{1}{x} + k$

48. $\int \frac{xsen(x) + 1}{x} dx$ è *uguale a*

A. $-\cos(x) + \ln|x| + k$ **B.** $\cos(x) + \ln|x| + k$

C. $-\cos(x) - \frac{1}{x^2} + k$ **D.** $-\cos(x) + \ln(x) + k$

49. $\int \frac{x^2 cos(x) + 1}{x^2} dx$ è *uguale a*

A. $\cos(x) - \frac{1}{x} + k$ **B.** $\text{sen}(x) + \ln(x^2) + k$

C. $-\text{sen}(x) + \frac{1}{x^2} + k$ **D.** $\text{sen}(x) - \frac{1}{x} + k$

50. $\int \frac{x^2}{1 + x^2} dx$ è *uguale a*

A. $\frac{x^3}{3} + x + k$ **B.** $\frac{\frac{x^3}{3}}{x + \frac{x^3}{3}} + k$

C. $x - arctan(x) + k$ **D.** $x + arctan(x) + k$