Integrali immediati e metodo di scomposizione

Claudio Gori Giorgi e
Daniela Valenti, 2023

Calcolo integrale e calcolo differenziale

Per calcolare un integrale il passo fondamentale è: risalire da una funzione alle sue primitive, cioè 'tornare indietro' da una derivata alla funzione originale.
Perciò il calcolo integrale è organizzato in modo analogo al calcolo delle derivate.

DERIVATE

Calcolo differenziale:

- **Derivate di funzioni elementari**
- **Algebra delle derivate**

PRIMITIVE

Calcolo integrale:

- **Integrali immediati**
- **Metodi di integrazione**

Comincio a studiare gli integrali immediati

Claudio Gori Giorgi e
Daniela Valenti, 2023

Primi integrali immediati

Come ho trovato i primi integrali indefiniti immediati?
La guida è la relazione fra primitiva e derivata:

$$\int F'(x)dx = F(x) + k$$

Ho ricordato che $2x$ è la derivata di x^2, cioè x^2 è una primitiva di $2x$
Così scrivo:

$$\int 2x dx = x^2 + k$$

Questo esempio fa capire che:

- **Per calcolare un integrale indefinito basta trovare una primitiva di F'(x);**
- **Trovo una primitiva se F'(x) è una derivata che già conosco.**

Claudio Gori Giorgi e Daniela Valenti, 2023

Integrale di una potenza di x

L'esempio suggerisce di trovare le primitive di altre potenze di x, sempre a partire dalla relazione

$$\int F'(x)dx = F(x) + k$$

$F(x)$	$F'(x)$
x^4	$4x^3$
$\frac{x^4}{4}$	x^3
In generale, dalla derivata di x^a ricavo	
$\frac{x^a}{a}$	x^{a-1}

$\int F'(x)dx = F(x) + k$
$\int 4x^3 dx = x^4 + k$
$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + k$
$\int x^{a-1} dx = \frac{x^a}{a} + k$

Il risultato è più agevole da applicare se scrivo:

$m = a - 1$ da cui $a = m+1$ **e quindi:**

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + k$$

Integrale di x^m: esempi

La formula per derivare una potenza di x valeva per qualunque esponente reale, perciò applico la formula appena trovata in qualche caso particolare.

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + k$$

per $n=2$,

$$\int x^2\,dx=\frac{1}{2+1}x^{2+1}+k \quad \text{ossia} \quad \int x^2\,dx=\frac{1}{3}x^3+k$$

per $n=1$, $x^1=x$

$$\int x\,dx=\frac{1}{1+1}x^{1+1}+k \quad \text{ossia} \quad \int x\,dx=\frac{1}{2}x^2+k$$

per $n=0$, $x^0=1$

$$\int 1\,dx=\frac{1}{0+1}x^{0+1}+k \quad \text{ossia} \quad \int 1\,dx=x+k$$

per $n=-2$, $\quad x^{-2}=\frac{1}{x^2}$

$$\int \frac{1}{x^2}dx=\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}+k, \quad \text{ossia} \quad \int \frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}+k$$

Integrale di x^m: il caso m = –1

Che cosa succede nel caso m = –1?

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + k$$

~~m = –1~~

$$\int x^{-1} dx = \frac{x^{-1+1}}{-1+1} = \frac{x^0}{0}$$

Nel caso m = – 1 NON posso applicare la formula

Questo vuol dire che la funzione $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$

NON è la derivata di una funzione conosciuta?

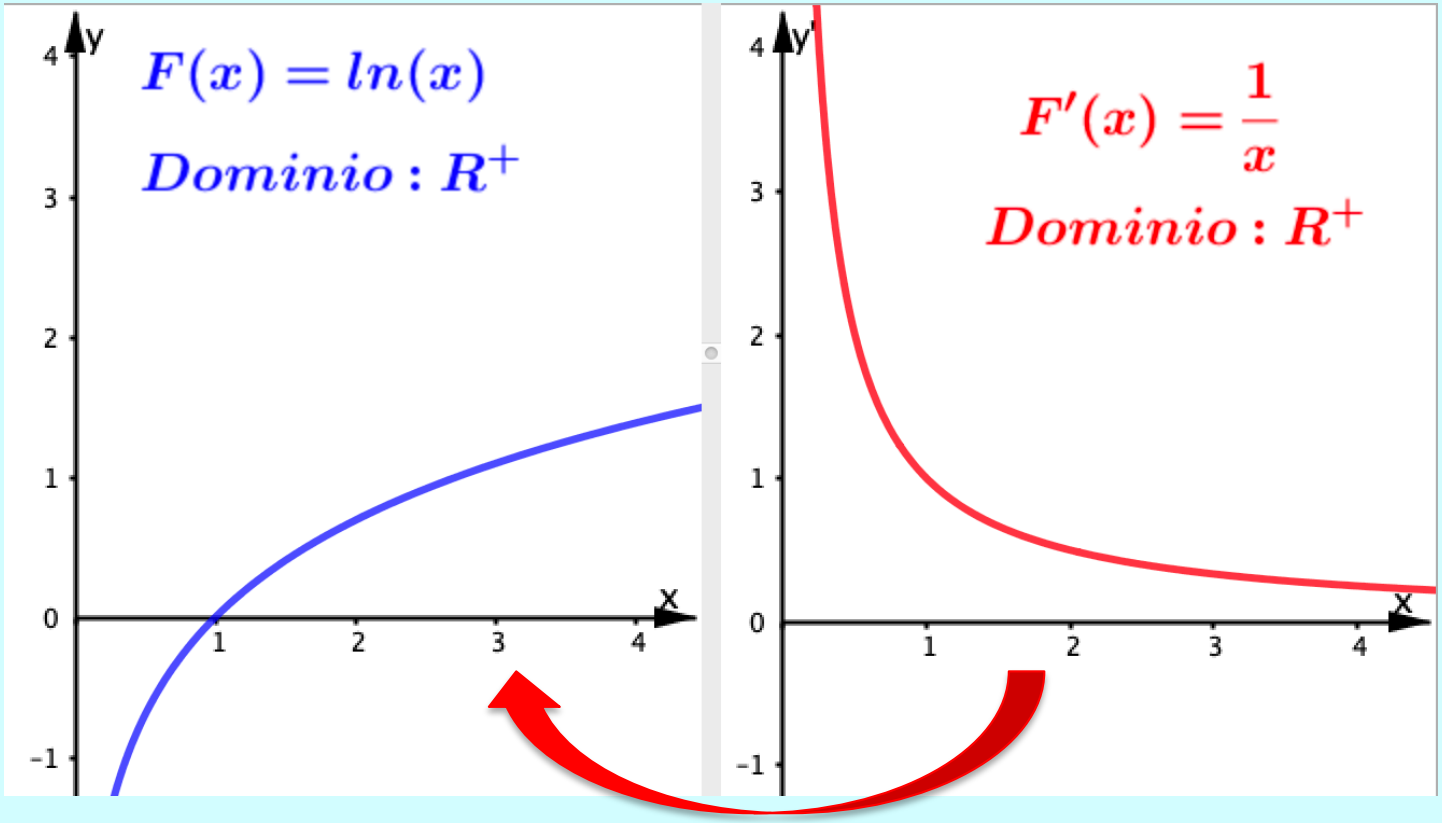
Basta scorrere una tabella di derivate di funzioni elementari per trovare la risposta.

F(x)	*F'(x)*
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$

Questa risposta richiede una riflessione

Claudio Gori Giorgi e Daniela Valenti, 2023

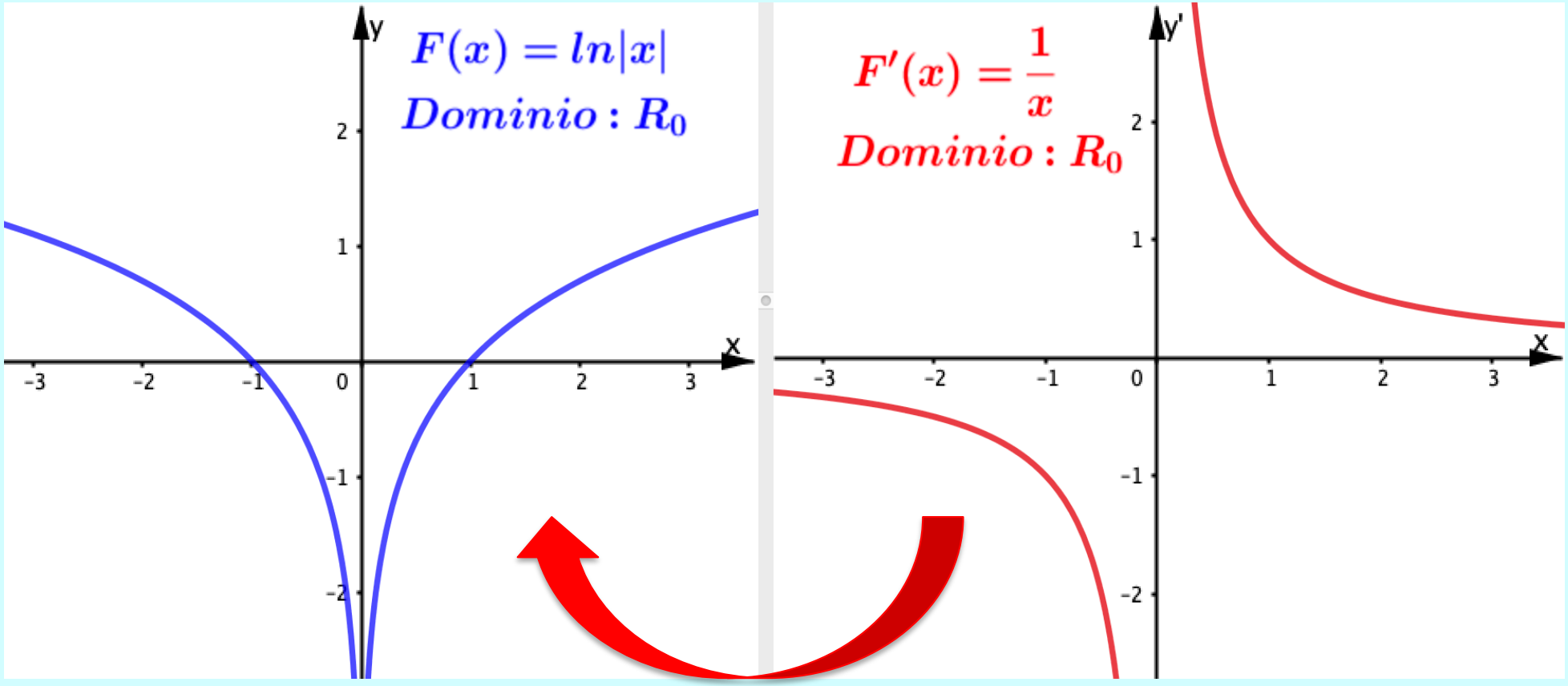
Derivata di $ln(x)$



Questo vuol dire che trovo una primitiva della funzione $\frac{1}{x}$ solo con dominio i numeri positivi?

Claudio Gori Giorgi e Daniela Valenti, 2023

Primitiva di $\frac{1}{x}$



Con il modulo di x riesco a trovare una primitiva di $\frac{1}{x}$ con dominio R_0 e scrivo:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = ln|x| + k$$

Claudio Gori Giorgi e Daniela Valenti, 2023

Altri integrali immediati

Oltre alle potenze, le altre *derivate che già conosco* sono quelle nella tabella delle derivate elementari; dunque basta «leggerla al contrario» per avere una tabella di integrali immediati, come quella qui sotto.

$F(x)$	$F'(x)$	$\int F'(x)dx = F(x) + k$
$\frac{x^{m+1}}{m+1}$	x^m	$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + k$
Solo se $m \neq -1$		Solo se $m \neq -1$
$ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x} dx = ln\|x\| + k$
e^x	e^x	$\int e^x dx = e^x + k$
$sen(x)$	$cos(x)$	$\int cos(x)dx = sen(x) + k$
$-cos(x)$	$sen(x)$	$\int sen(x)dx = -cos(x) + k$
$tan(x)$	$1 + tan^2(x)$	$\int [1 + tan^2(x)]dx = tan(x) + k$
$arcsen(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arcsen(x) + k$
$arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctan(x) + k$

Claudio Gori Giorgi e Daniela Valenti, 2023

Attività 1

Completa la scheda di lavoro per consolidare gli integrali immediati

Claudio Gori Giorgi e Daniela Valenti, 2023

Risposte commentate all’attività

Claudio Gori Giorgi e
Daniela Valenti, 2023

Quesito 1

1. Completa la seguente tabella

m	x^m	$\int x^m = \frac{x^{m+1}}{m+1} + k$
4	x^4	$\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + k = \frac{x^5}{5} + k$
–4	$x^{-4} = \frac{1}{x^4}$	$\int x^{-4} dx = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + k = \frac{x^{-3}}{-3} + k = -\frac{1}{3x^3} + k$
1	$x^1 = x$	$\int x^1 dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + k = \frac{x^2}{2} + k$
$\frac{1}{2}$	$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$	$\int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + k = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + k = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + k$
$\frac{2}{3}$	$x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$	$\int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + k = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + k = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + k$
$-\frac{1}{2}$	$x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$\int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + k = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + k = 2\sqrt{x} + k$

Claudio Gori Giorgi e Daniela Valenti, 2023

Quesiti 2 e 3

Scegli la risposta corretta ai quesiti 2 e 3

2. Come trovi $|x|$?

A. $|x| = \pm x$ **B.** $|x| = -x$ **C.** $|x| = x^2$ **D.** $|x| = \begin{cases} x \text{ se } x \geq 0 \\ -x \text{ se } x < 0 \end{cases}$

3. Come calcoli la derivata di $y = ln(-x)$?

A. $y' = \frac{1}{-x}$ **B.** $y' = \frac{-1}{-x}$ **C.** $y' = \frac{1}{ln(-x)}$ **D.** $y' = -\ln(x)$

La funzione $y = \ln(-x)$ è composta da

$y = \ln(z)$ con $z = (-x)$

E debbo calcolare $y' = \frac{dy}{dx}$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dy}{dz} = \frac{1}{z} \\ \frac{dz}{dx} = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

Claudio Gori Giorgi e Daniela Valenti, 2023

Quesito 4

4. Completa la tabella qui sotto.

$G(x) = \ln(x)$ Dominio: R^+	$G'(x) = \frac{1}{x}$ Dominio: R^+
$H(x) = \ln(-x)$ Dominio: R^-	$H'(x) = \frac{1}{x}$ Dominio R^-
$F(x) = \ln\lvert x\rvert = \begin{cases} \ln(x)\ se\ x > 0 \\ \ln(-x)\ \ se\ x < 0 \end{cases}$ Dominio: R_0	$F'(x) = \frac{1}{x}$ Dominio: R_0

Claudio Gori Giorgi e
Daniela Valenti, 2023

Metodi di integrazione

DERIVATE

Calcolo differenziale:

- **Derivate di funzioni elementari**
- **Algebra delle derivate**

PRIMITIVE

Calcolo integrale:

- **Integrali immediati**
- **Metodi di integrazione**

Conclusi gli integrali immediati, passo ad un primo metodo di integrazione.
I ragionamenti sono sempre gli stessi: dalla derivata 'tornare indietro alla primitiva'.

Dall'algebra delle derivate a un metodo di integrazione

L'algebra delle derivate porta a derivare funzioni ottenute con addizioni e moltiplicazioni tra funzioni elementari. Ecco come posso ragionare.

$F(x)$	$F'(x)$	$\int F'(x)dx = F(x) + k$
$G(x) = x^2$	$G'(x) = 2x$	$\int G'(x)dx = G(x) + k$
$H(x) = sen(x)$	$H'(x) = \cos(x)$	$\int H'(x)dx = H(x) + k$
$S(x) = 3x^2 + 4sen(x) = 3G(x) + 4H(x)$	$S'(x) = 3x^2 + 4sen(x) = 3G'(x) + 4H'(x)$	$\int S'(x)dx = S(x) + k$

$$\int [3G'(x) + 4H'(x)]dx = 3G(x) + 4H(x) + k$$

Claudio Gori Giorgi e Daniela Valenti, 2023

Dall'algebra delle derivate a un metodo di integrazione

E posso anche scrivere il risultato in una forma diversa

$F(x)$	$F'(x)$
$G(x) = x^2$	$G'(x) = 2x$
$H(x) = sen(x)$	$H'(x) = \cos(x)$
$S(x) = 3x^2 + 4sen(x) = 3G(x) + 4H(x)$	$S'(x) = 3x^2 + 4sen(x) = 3G'(x) + 4H'(x)$

$$\int F'(x)dx = F(x) + k$$

$$\int G'(x)dx = G(x) + k$$

$$\int H'(x)dx = H(x) + k$$

$$\int [3G'(x) + 4H'(x)]dx = 3\int G'(x)dx + 4\int H'(x)dx$$

La formula vale anche se al posto di 3 e 4 scrivo altri due qualunque numeri reali.

Claudio Gori Giorgi e Daniela Valenti, 2023

Metodo di integrazione per scomposizione

Siamo così arrivati al metodo di integrazione per scomposizione, che posso scrivere nella forma

$$\int [aF'(x) + bG'(x)]dx = a\int F'(x)dx + b\int G'(x)dx$$

dove alle lettere a e b posso sostituire una qualunque coppia di numeri reali

oppure

$$\int [af(x) + bg(x)]dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$$

dove trovo: $f(x) = F'(x)$ e $g(x) = G'(x)$

Claudio Gori Giorgi e Daniela Valenti, 2023

Attività 2

Completa la scheda di lavoro per consolidare il contenuto della lezione

Claudio Gori Giorgi e Daniela Valenti, 2023

Risposte commentate all’attività

Claudio Gori Giorgi e
Daniela Valenti, 2023

Quesito 1

1. Completa la seguente tabella

$\int f(x)dx$	$\int x^2dx = \frac{x^3}{3} + k$	$\int \frac{1}{x}dx = ln\|x\| + k$
$\int g(x)dx$	$\int xdx = \frac{x^2}{2} + k$	$\int e^x dx = e^x + k$
$\int [af(x) + bg(x)]dx =$ $= a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$	$\int (4x^2 + 5x)dx =$ $= 4\int x^2dx + 5\int xdx =$ $= 4\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} + k$	$\int \left(\frac{6}{x} + 7e^x\right)dx =$ $= 6\int \frac{1}{x}dx + 7\int e^x dx =$ $= 6ln\|x\| + 7e^x + k$

$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$	$\int \frac{1}{x}dx = ln\|x\| + k$	$\int e^x dx = e^x + k$

Claudio Gori Giorgi e
Daniela Valenti, 2023

Quesito 2

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \quad con\ m \neq -1$$

Calcola il risultato dei seguenti integrali

2. $\int (2x^3 + 4)dx = 2\int x^3 dx + 4\int 1 \cdot dx = 2 \cdot \frac{x^4}{4} + 4x + k = \frac{1}{2} + 4x + k$

3. $\int (5x^2 + 3x)dx = 5\int x^2 dx + 3\int x dx = 5 \cdot \frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + k$

4. $\int \left(2x^2 + \frac{3}{x^2}\right) dx = 2\int x^2 dx + 3\int x^{-2} dx = 2 \cdot \frac{x^3}{3} + 3\frac{x^{-1}}{-1} + k = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{x} + k$

5. $\int \frac{2x^4 + 3}{x^2} dx = \int \left(2x^2 + \frac{3}{x^2}\right) dx$

Applico la proprietà distributiva:

$$\frac{a+b}{c} = (a+b) \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

Claudio Gori Giorgi e Daniela Valenti, 2023

Parole e simboli della matematica

Combinazione lineare delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$:

$$af(x) + bg(x)$$

Esempio

$$3sen(x) + 2cos(x)$$

Combinazione lineare degli integrali di $f(x)$ e $g(x)$:

$$a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$$

Esempio

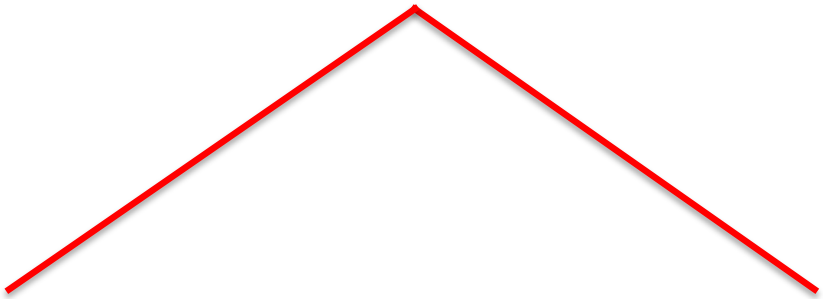
$$3\int sen(x)dx + 2\int cos(x)dx$$

Claudio Gori Giorgi e
Daniela Valenti, 2023

Parole e simboli della matematica

$$\int [af(x) + bg(x)]dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$$

Prende il nome di:



Linearità dell'integrale ***Metodo di scomposizione***

Claudio Gori Giorgi e
Daniela Valenti, 2023

Parole e simboli della matematica

Posso estendere il metodo di integrazione per scomposizione alle combinazioni lineari di più di due funzioni che hanno primitive immediate. In questi casi, per snellire i calcoli, richiamo la formula seguente.

$$\int [aG'(x) + bH'(x)]dx = aG(x) + bH(x) + k$$

ESEMPIO

$$\int \left(5x^3 - 2x^2 + 9x - 7\right)dx = 5\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} + 9\frac{x^2}{2} - 7x + k$$

Claudio Gori Giorgi e Daniela Valenti, 2023

Uno sguardo alla storia

Potrei pensare: lo studio continua con l'algebra degli integrali, come avevo studiato l'algebra delle derivate.
E arriverò a calcolare la primitiva di qualunque funzione, anche molto complicata.
Questo hanno pensato anche i matematici del 1600.
Così hanno trovato altri due metodi di integrazione, ma hanno incontrato difficoltà insormontabili.

Un esempio: non si riusciva a calcolare

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx$$

Eppure la funzione da integrare è un 'semplice' quoziente di funzioni elementari, con primitiva nota.

Claudio Gori Giorgi e Daniela Valenti, 2023

Uno sguardo alla storia

Solo alla fine XIX secolo è arrivata la dimostrazione che era impossibile calcolare, con integrali immediati e metodi di integrazione, la primitiva di $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

Ed è emerso lo stesso problema con altre funzioni. Questo ha portato a due tipi di ricerche matematiche:

1. **Selezionare e studiare le funzioni *elementarmente integrabili,* che hanno primitive composte con funzioni elementari.**
2. **Studiare *metodi numerici* per calcolare in modo approssimato le primitive delle restanti funzioni.**

In queste lezioni trovi i risultati fondamentali del primo tipo di ricerche. Ma negli approfondimenti puoi trovare idee – base dei metodi numerici.

Claudio Gori Giorgi e Daniela Valenti, 2023