Dal moto agli integrali

Claudio Gori Giorgi e Daniela Valenti 2023

Velocità e distanza percorsa: un problema facile

1. **Un'auto mantiene in autostrada una velocità costante v di 110km/h dalle 9 alle 11; calcola la distanza *s* percorsa durante le 2 ore.**

Risposta immediata: solo se la velocità v è costante, la distanza percorsa S durante un intervallo di tempo Δt è

$$S = v \cdot \Delta t \quad \text{da cui } s = 110 \cdot 2 = 220$$

Velocità e distanza percorsa: un problema per pensare

2. **Come calcolare S se viaggio sempre dalle 9 alle 11, ma non mantengo la velocità costante e ho solo il tachimetro che indica la velocità v in ogni istante?**

Posso scrivere su un foglio la velocità leggendola sul tachimetro a intervalli di mezz'ora.

Il viaggio inizia alle 9. Durante la prima mezz'ora scelgo un istante, ad esempio $t_1 = 9.15$ e leggo la velocità di 100*km/h*.

Inizio a costruire una tabella:

Intervallo	Istante in ore	Velocità in km/h
9÷9.30	$t_1 = 9.15$	$v(t_1)=100$

Velocità e distanza percorsa: un problema per pensare

Ho visto che la velocità è rimasta quasi costante per tutta la mezz'ora. Nel moto a velocità costante lo spazio è $\boldsymbol{s = v \cdot \Delta t}$ e quindi nella prima mezz'ora ho percorso:

$$s_1 \cong v(t_1) \cdot \Delta t = 100 \cdot 0{,}5 = 50km$$

Aggiungo una colonna alla tabella

Intervallo	Istante in ore	Velocità in km/h	Distanza in km
9÷9 e 30	t_1 = 9.15	100	$s_1 \cong v(t_1) \cdot \Delta t = 50$

Claudio Gori Giorgi e Daniela Valenti 2023

Velocità e distanza percorsa: un calcolo approssimato

Procedo così nelle successive mezze ore e completo la tabella:

Tra le ore	Istante in ore	Velocità in km/h	Distanza percorsa in km
9 ÷ 9.30.	$t_1 = 9.15$	100	$s_1 \cong v(t_1) \cdot \Delta t = 50$
9.30 ÷ 10	$t_2 = 9.45$	120	$s_2 \cong v(t_2) \cdot \Delta t = 60$
10 ÷ 10.30	$t_3 = 10.15$	80	$s_3 \cong v(t_3) \cdot \Delta t = 40$
10.30 ÷ 11	$t_4 = 10.45$	90	$s_4 \cong v(t_4) \cdot \Delta t = 45$

Con questo calcolo approssimato la distanza percorsa è:

$$\boldsymbol{S} \cong 50 + 60 + 40 + 45 = 195km$$

Col simbolo di sommatoria:

$$\boldsymbol{S} \cong \sum_{i=1}^{4} s_i = \sum_{i=1}^{4} v(t_i) \cdot \Delta t = 195km$$

Velocità e distanza percorsa: trovo un integrale

Però non è detto che la velocità sia rimasta costante in ogni mezz'ora. Miglioro l'approssimazione dividendo l'intervallo dalle 9 alle 11 in intervalli Δt più piccoli, ad esempio di un quarto d'ora.
Sono 8 intervalli e la formula diventa:

$$\boldsymbol{S} \cong \sum_{i=1}^{8} s_i = \sum_{i=1}^{8} v(t_i) \cdot \Delta t$$

Quando il numero $\boldsymbol{n}$ degli intervalli tende all'infinito:

- **la sommatoria tende a una somma di infiniti addendi;**
- **$\boldsymbol{\Delta t}$ tende a un infinitesimo $\boldsymbol{dt}$;**
- **i valori $\boldsymbol{v(t_i)}$ tendono a $\boldsymbol{v(t)}$ e la formula diventa:**

$$\boldsymbol{S = \int_{9}^{11} v(t)\,dt}$$

Integrale e moto a velocità variabile

I numeri 9 e 11 sono legati all'esempio; in generale, se il moto a velocità variabile si svolge tra gli istanti a e b, la distanza percorsa sarà:

$$S = \int_a^b v(t)dt$$

Ritrovo l'integrale già visto per la misura dell'area sotto un curva.
I due casi sembrano molto lontani, come sono legati?
Rifletto sul percorso seguito.

Area sotto una curva e moto a velocità costante

Ho diviso l'intervallo $[a, b]$ in intervalli Δt e in ognuno di questi intervalli ho pensato il moto a velocità costante.

Ho trovato la distanza s percorsa in un tempo Δt data da:

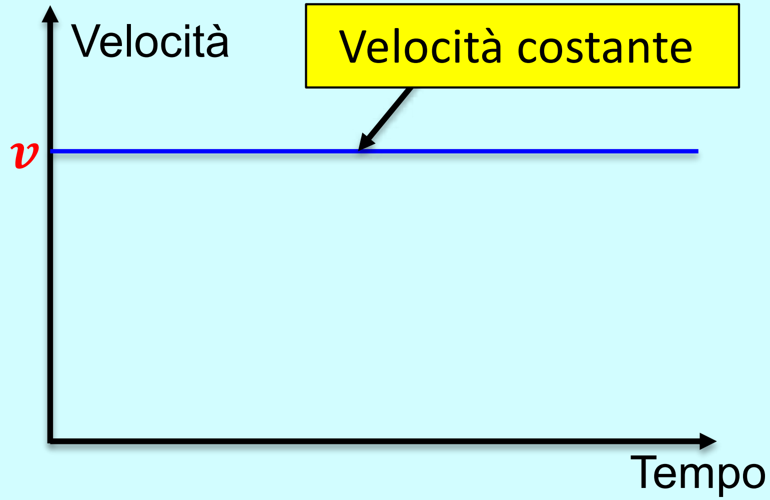
$$s = v \cdot \Delta t$$

Ad esempio, nella prima mezz'ora ho scritto

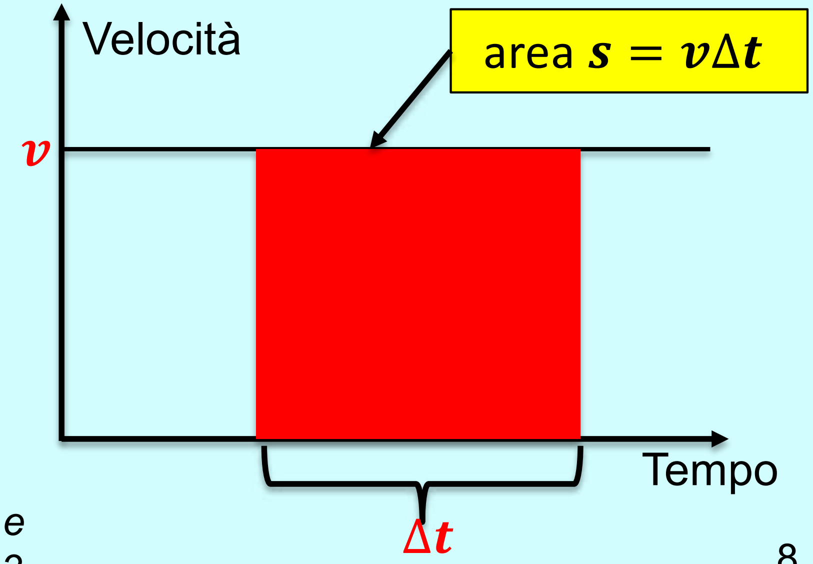
$$s_1 \cong v(t_1) \cdot \Delta t = 100 \cdot 0{,}5 = 50km$$

Interpreto graficamente questa formula nel piano cartesiano che ha in ascisse il tempo e in ordinate la velocità.

Traccio il grafico della velocità.



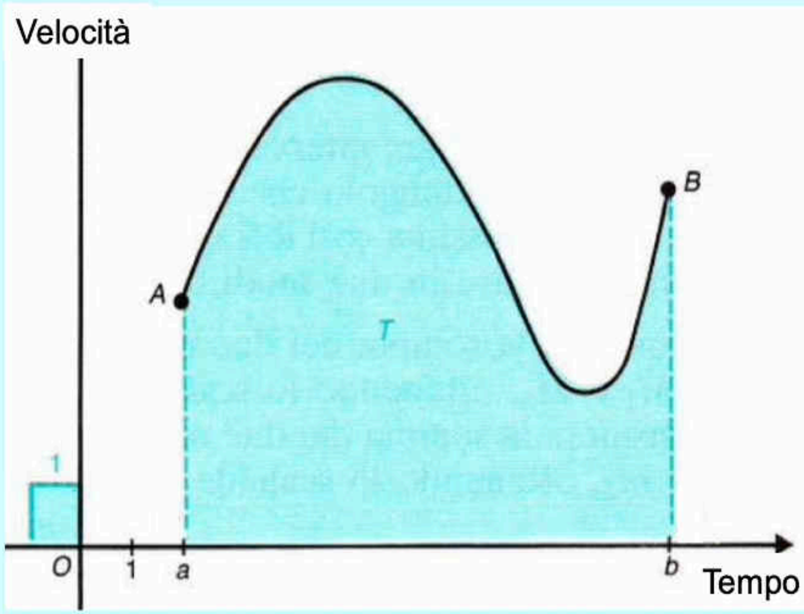
La distanza percorsa è uguale all'area del rettangolo rosso.



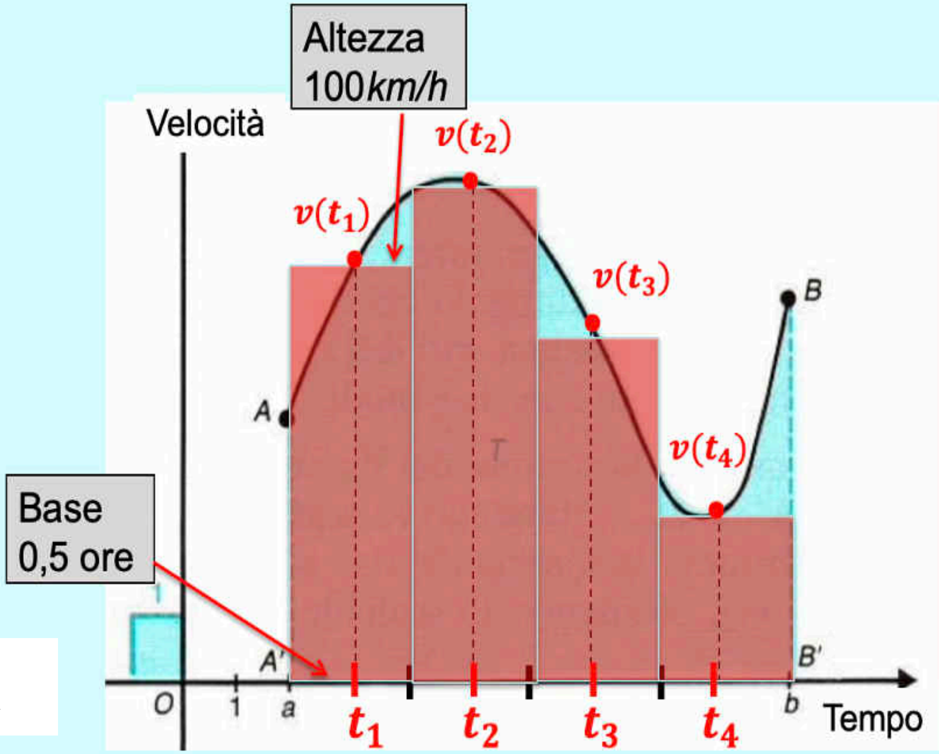
Claudio Gori Giorgi e Daniela Valenti 2023

Area sotto una curva e moto a velocità variabile

Nel caso della velocità variabile osservo l'area sotto il grafico di *v(t)*.



$s_1 = 100 \cdot 0,5$ è il rettangolo più a sinistra in figura, che ha base 0,5 ore e altezza 100*km/h*.
E così costruisco *n* rettangoli.

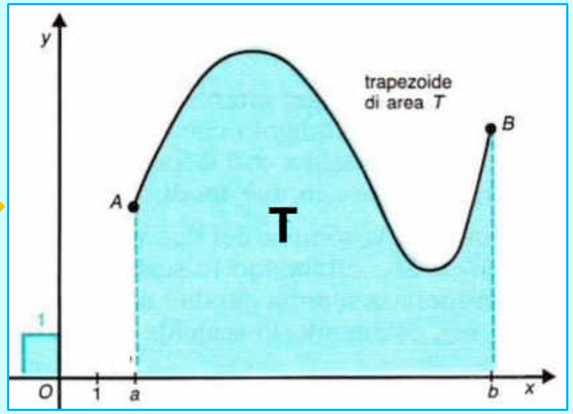


La distanza percorsa S è data da

$$S \cong \sum_{i=1}^{n} v(t_i) \cdot \Delta t$$

Area sotto una curva e moto a velocità variabile

Quando n diventa molto grande trovo che:



$$T \cong \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \quad \Rightarrow \quad T = \int_a^b f(x)dx$$

$$S \cong \sum_{i=1}^{n} v(t_i)\Delta t \quad \Rightarrow \quad S = \int_a^b v(t)dt$$

Procedimento per risolvere due problemi

Area sotto una curva e moto a velocità variabile

Con lo stesso procedimento calcolo l'area sotto il grafico di una funzione e la distanza percorsa con velocità variabile: dal punto di vista matematico i due problemi portano alla stessa definizione di integrale.

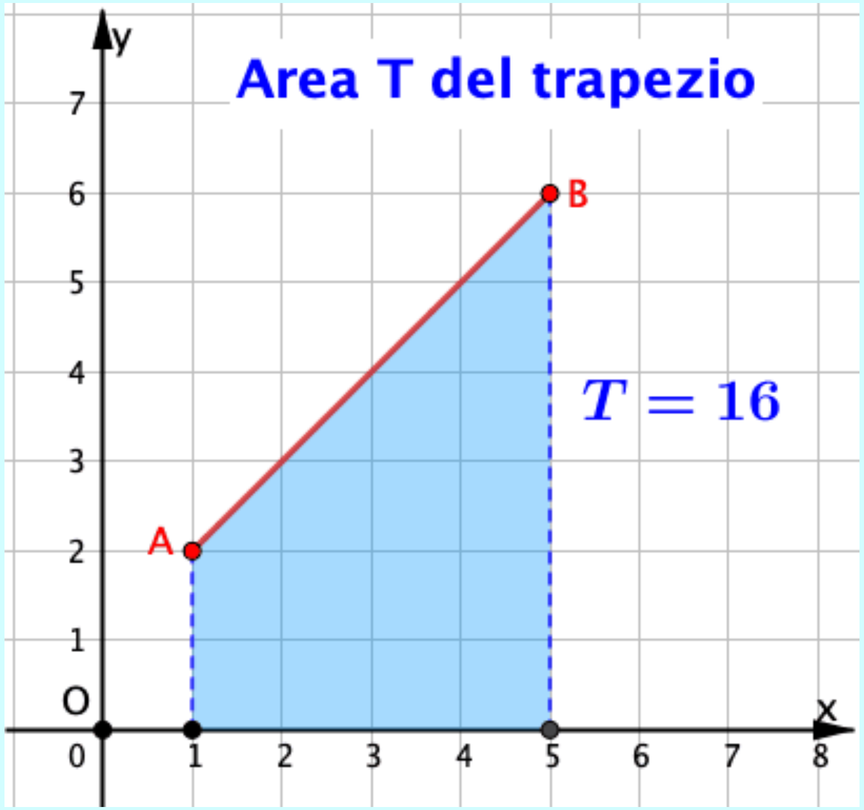
Questa osservazione permette di scegliere volta per volta il percorso più agevole per scoprire alcune proprietà dell'integrale.

Proprietà dell'integrale

Prima proprietà

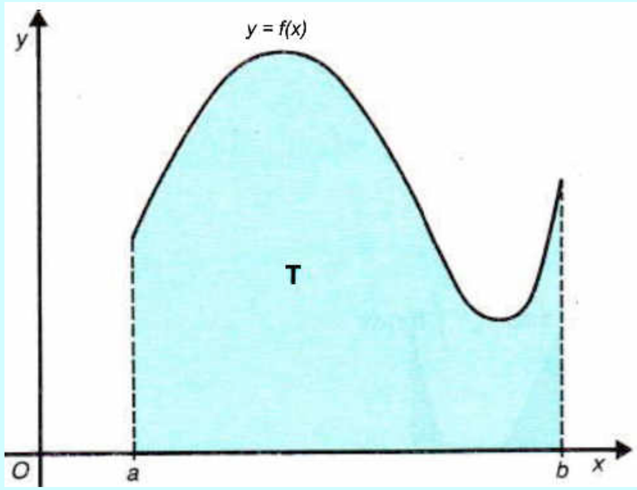
$$\int_{a}^{a} f(x)dx = 0$$

Qui conviene pensare all'area: la base del trapezoide è 0 e quindi l'area è 0.

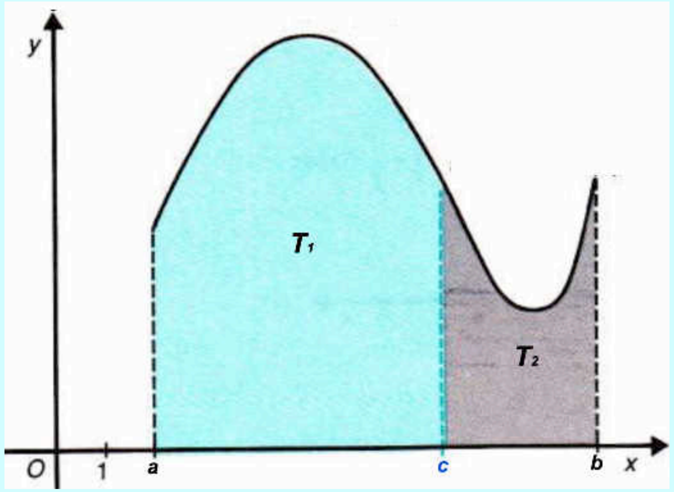


Seconda proprietà

Il moto porta subito a scoprire una proprietà: la distanza percorsa in due ore è la somma di quella percorsa nella prima ora più quello percorso nella seconda.
E le aree rendono la proprietà visibile.



$$\int_a^b f(x)dx = T$$



$$\int_a^c f(x)dx = T_1 \qquad \int_c^b f(x)dx = T_2$$

$$\mathbf{T = T_1 + T_2}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

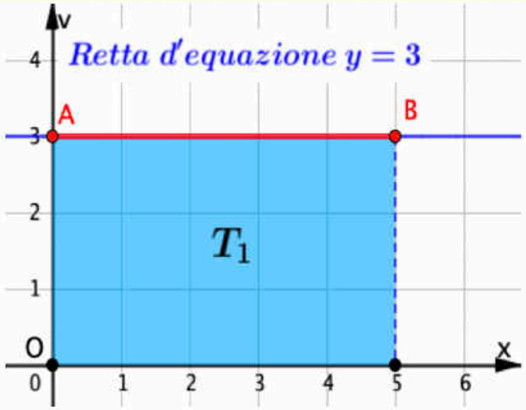
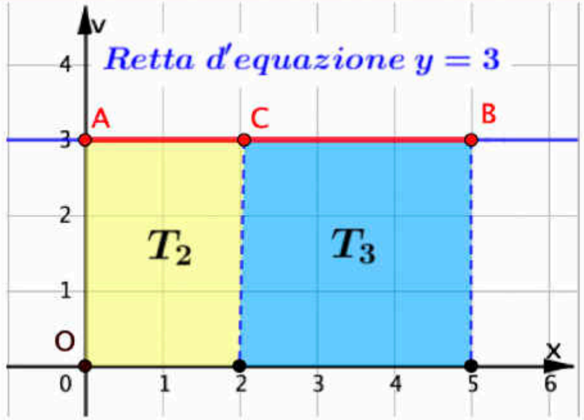
Attività

Completa la scheda per lavorare con le proprietà trovate

Riflessioni sull'attività svolta

Quesito 1

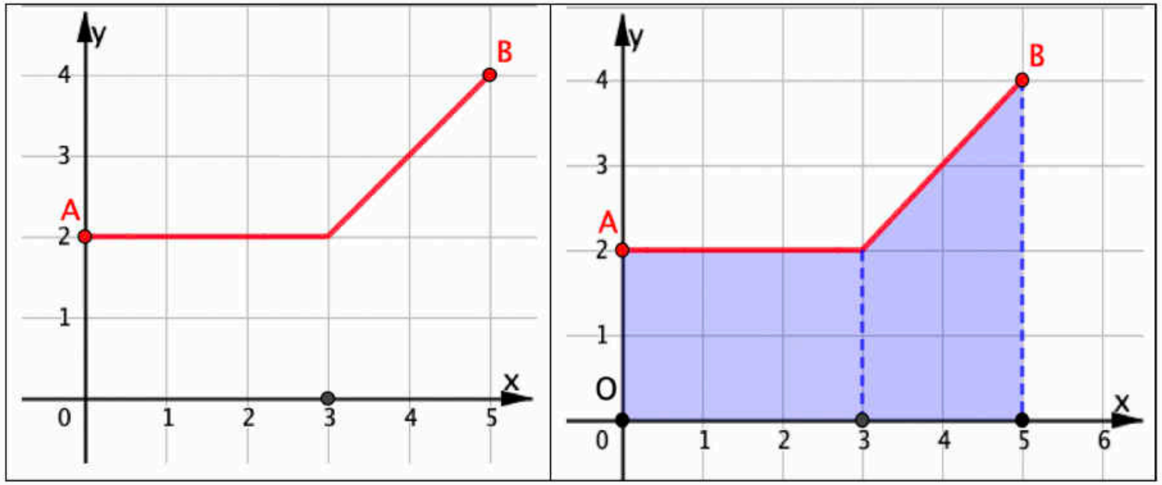
1. Completa la tabella seguente

 Area T_1 = **$5 \times 3 = 15$** $\int_0^5 3dx = \mathbf{15}$	 Area T_2 = **$2 \times 3 = 6$** $\int_0^2 3dx = \mathbf{6}$ Area T_3 = **$3 \times 3 = 9$** $\int_2^5 3dx = \mathbf{9}$
$\mathbf{T_2 + T_3 = T_1}$	$\int_0^2 3dx + \int_2^5 3dx = \int_0^5 3dx$

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Quesito 2

1. Nella figura qui sotto a sinistra è rappresentato il grafico di una funzione $f(x)$ e a destra la superficie sotto il grafico.



Quale fra le seguenti affermazioni è vera (**V**) e quale falsa (**F**)?

A. *non posso valutare* $\int_0^5 f(x)dx$ **F**

B. $\int_0^5 f(x)dx = 12$ **V**

C. $\int_0^5 f(x)dx = 14$ **F**

D. $\int_0^5 f(x)dx = \int_0^3 f(x)dx + \int_3^5 f(x)dx$ **V**

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Riflessioni sul simbolo di integrale

Il simbolo di integrale

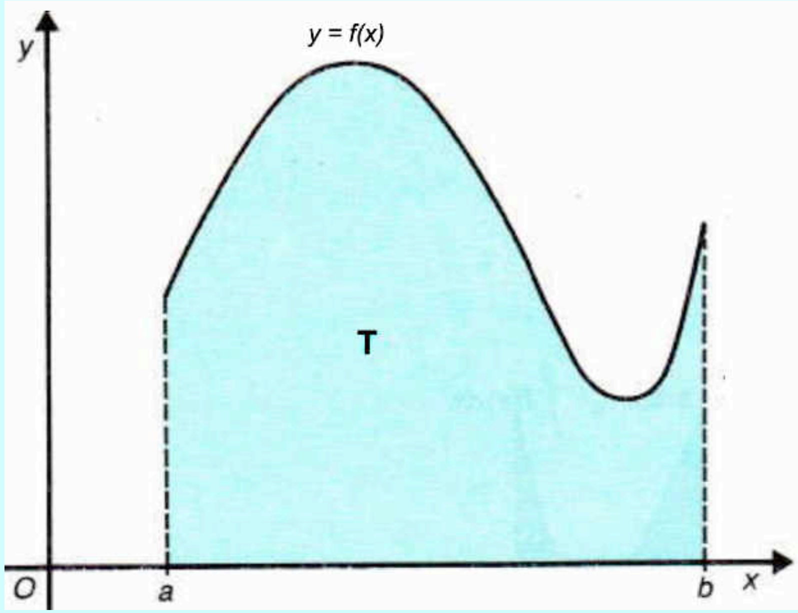


Grafico di una funzione *f*(*x*) con le seguenti caratteristiche:

- è rappresentata in un intervallo [a, b], con b > a;
- è continua;
- è positiva.

$$\int_a^b f(x)\,dx = T$$

Il simbolo di integrale ha come risultato l'area T compresa fra il grafico della funzione e l'asse delle x nell'intervallo dato.

$\Updownarrow$

$\boxed{\text{f(x) integrabile in [a, b]}}$