Dalle aree agli integrali

Claudio Gori Giorgi e Daniela Valenti 2023

Uno sguardo alla storia

Problemi aperti del XVII secolo:

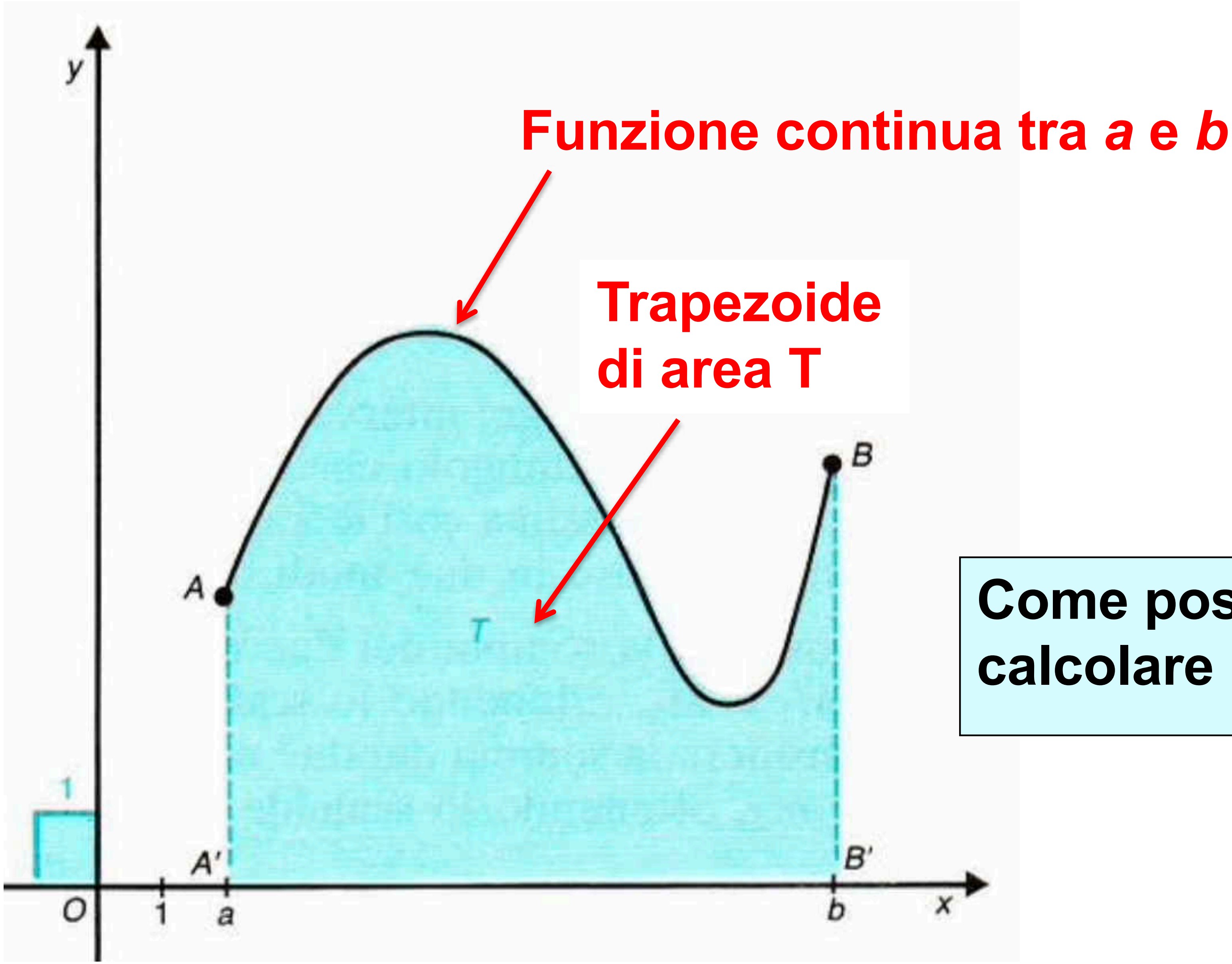
Matematica. Si riusciva a misurare l'area delle figure curvilinee solo in alcuni casi particolari.
Fisica. Si riusciva a studiare il moto a velocità variabile solo in alcuni casi particolari.

I due problemi sembrano non avere nulla in comune, ma **Archimede** nell'antichità e poi **Cavalieri** e **Riemann** hanno trovato un procedimento per risolvere entrambi i problemi.

Bonaventura Cavalieri 1598 - 1647

Bernhard Riemann 1826 - 1866

L’area sotto una curva

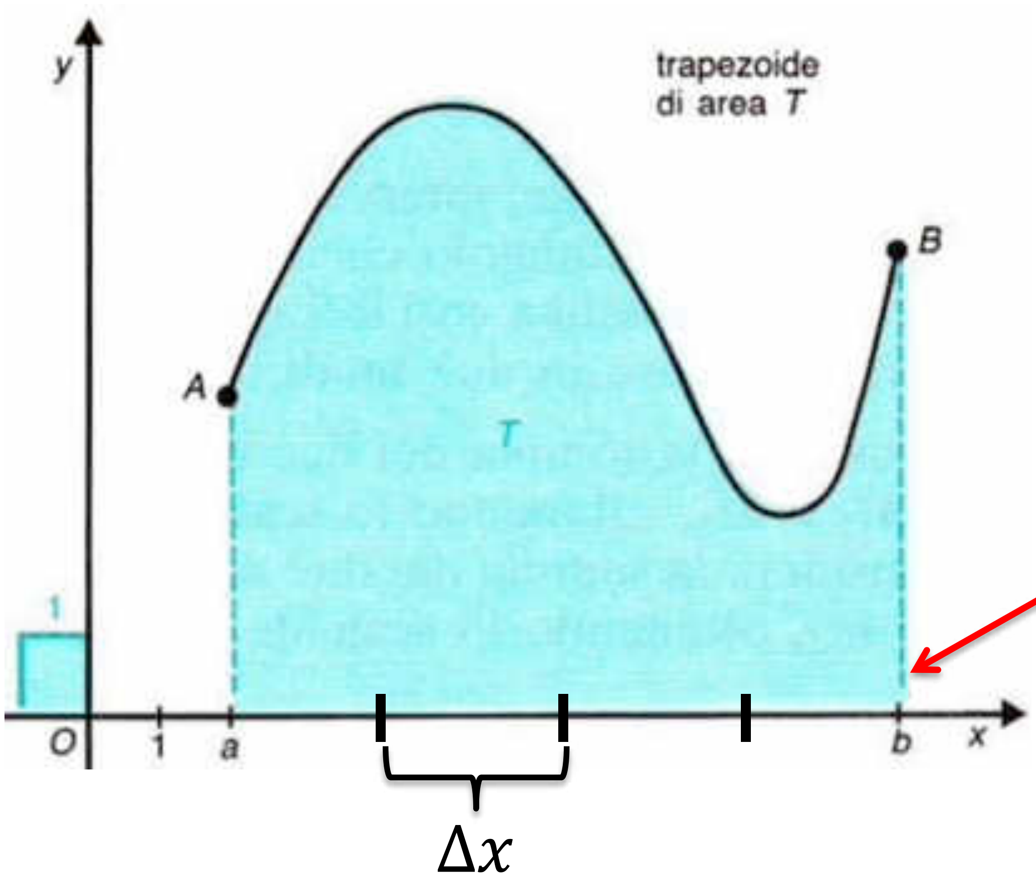


Come posso calcolare l’area T?

L'idea: approssimo l'area con rettangoli

1. **Divido l'intervallo $[a, b]$ in *n* intervalli eguali, ognuno ampio**

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

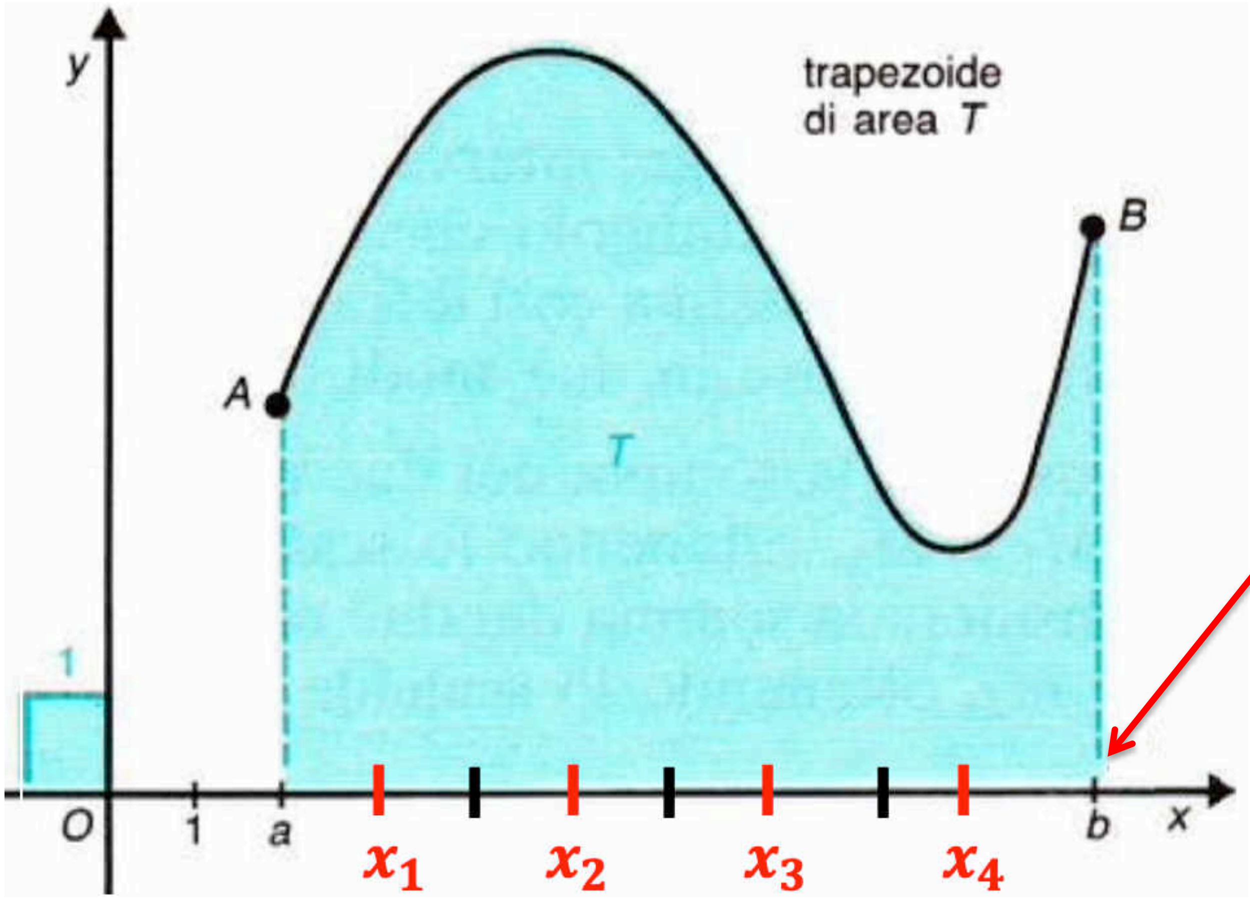


Qui ho diviso $[a, b]$ in 4 parti, quindi trovo

$$\Delta x = \frac{b-a}{4}$$

Approssimo l’area con rettangoli

2. In ogni intervallo scelgo il punto centrale

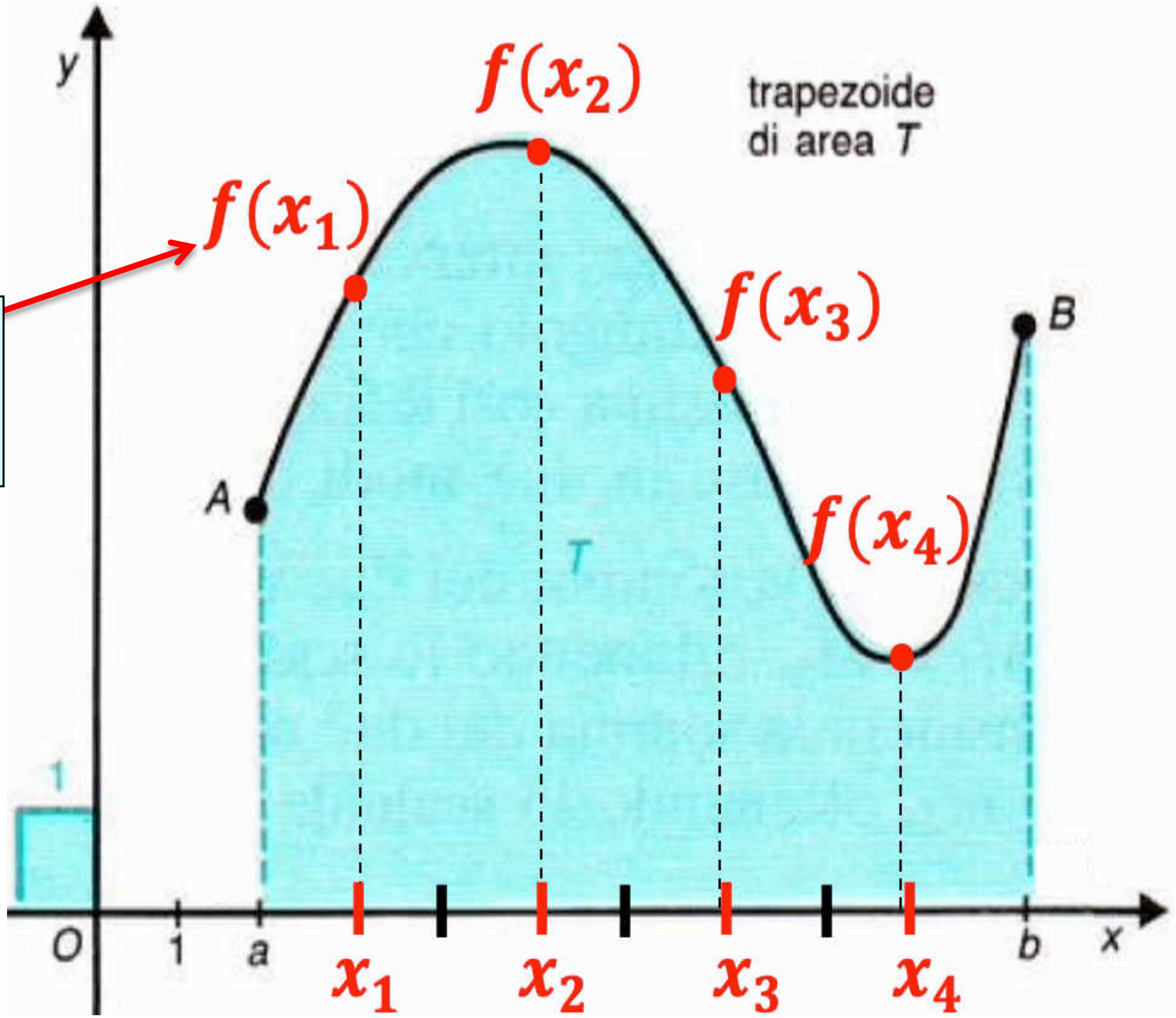


Qui i punti scelti sono x_1,x_2, x_3, x_4

Approssimo l'area con rettangoli

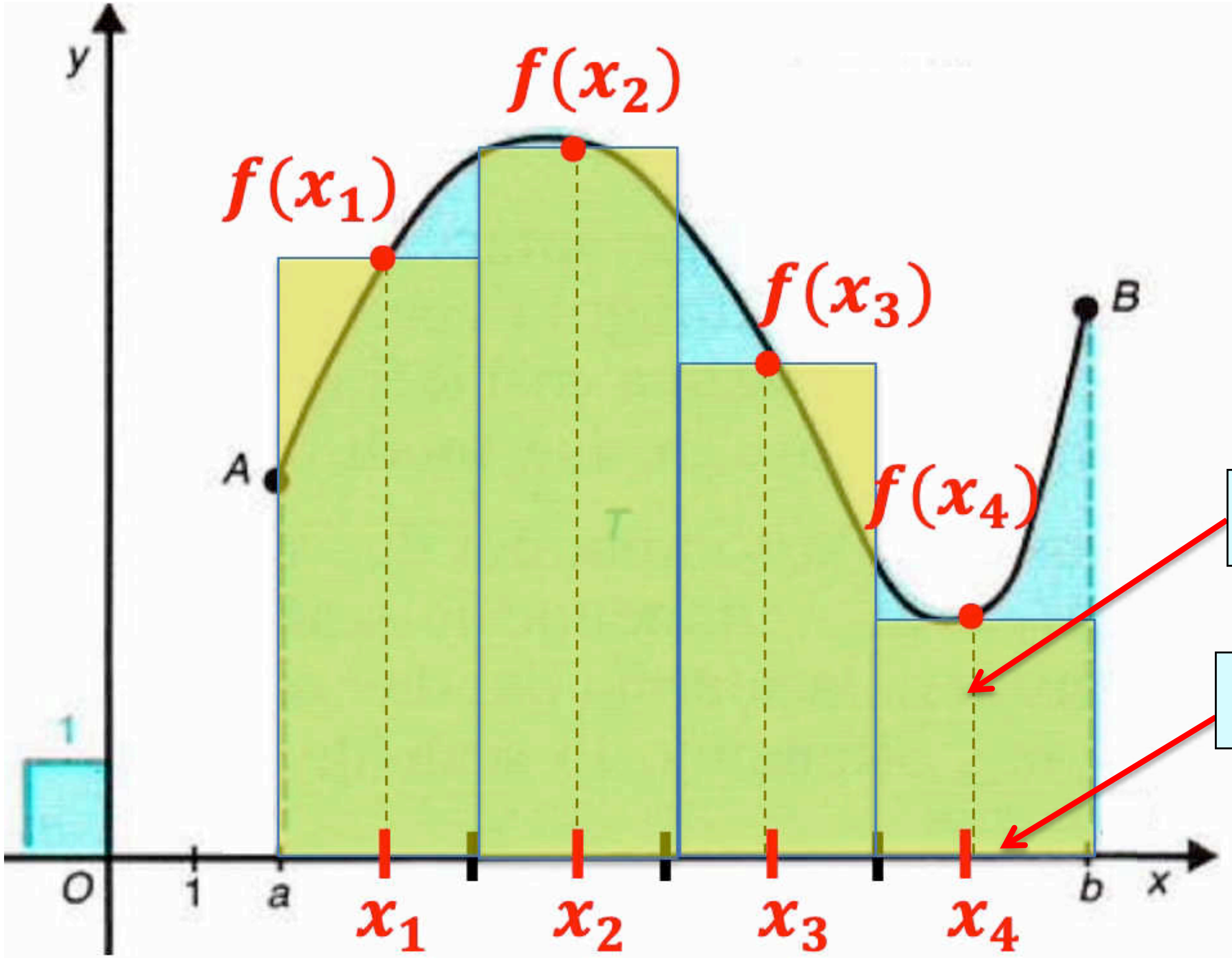
3. Per ogni ascissa trovo la corrispondente ordinata sulla curva

Qui le ordinate sono
$f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4)$



Approssimo l'area con rettangoli

4. **Traccio i rettangoli con base gli intervalli Δx e altezza $f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4)$.**

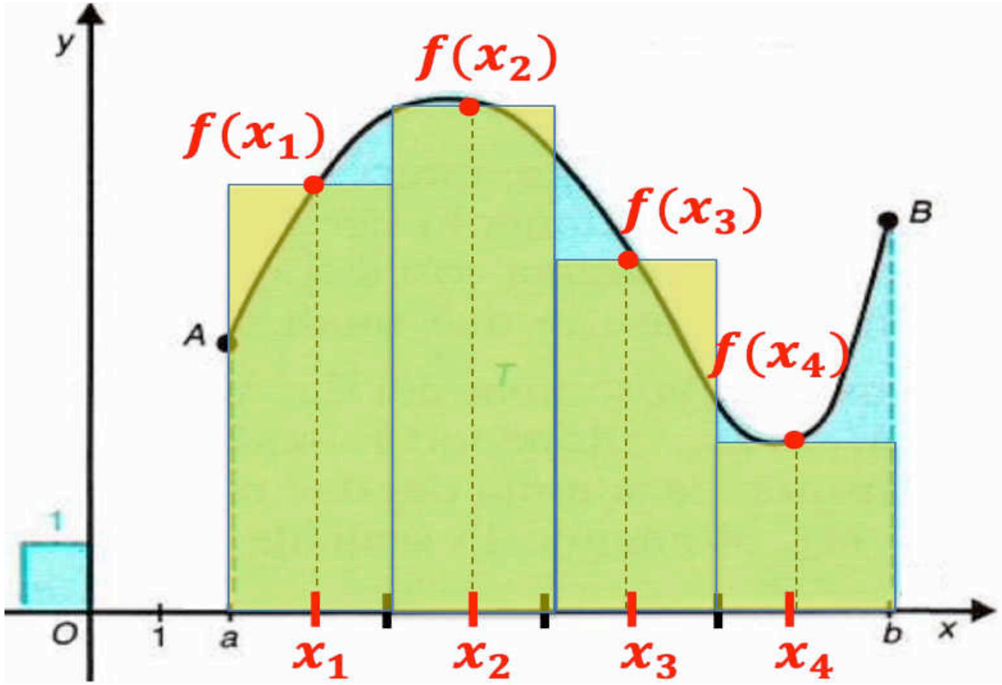


Altezza $f(x_4)$

Base Δx

Approssimo l’area con rettangoli

5. Approssimo l’area T del trapezoide con la somma delle aree dei rettangoli



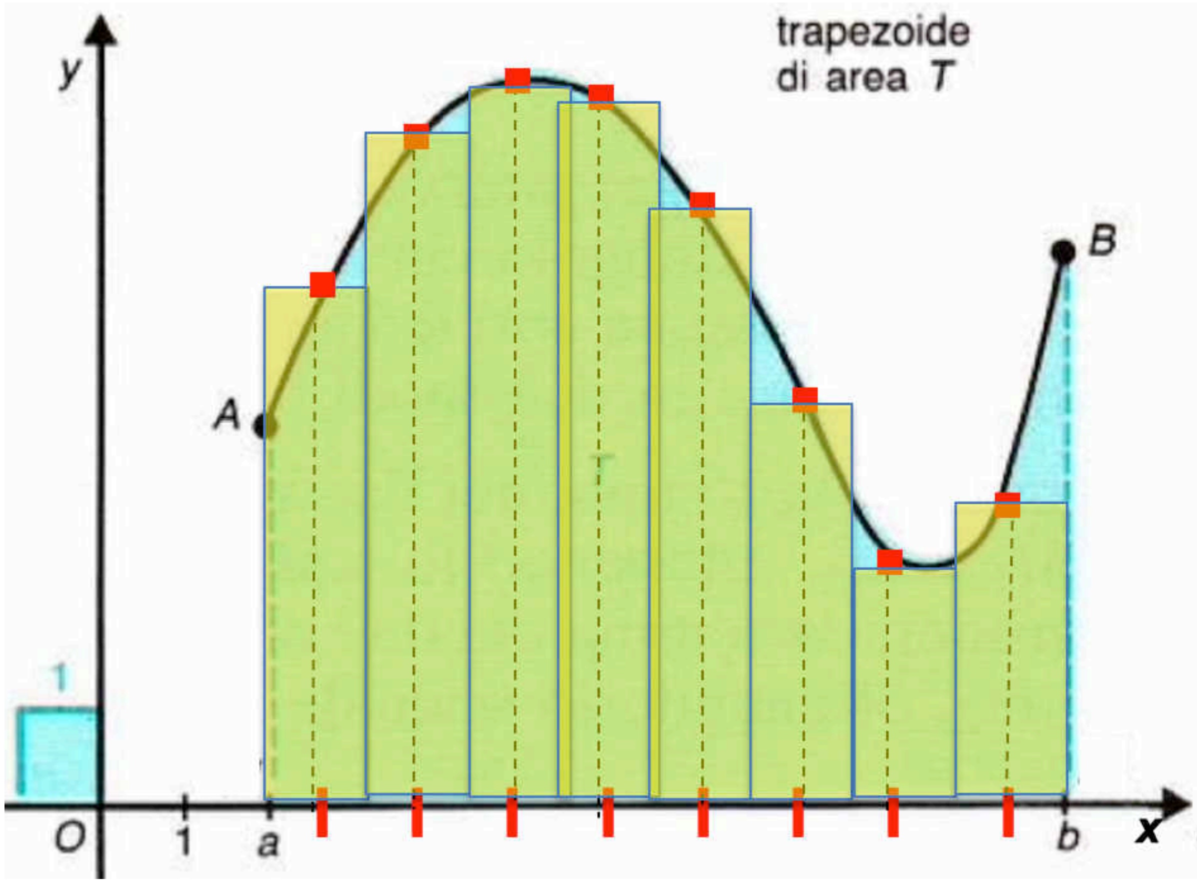
$$T \cong f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \cdot \Delta x + f(x_3) \cdot \Delta x + f(x_4) \cdot \Delta x$$

Con il simbolo di sommatoria

$$T \cong \sum_{i=1}^{4} f(x_i)\Delta x$$

Miglioro l'approssimazione

6. Per migliorare l'approssimazione infittisco i rettangoli

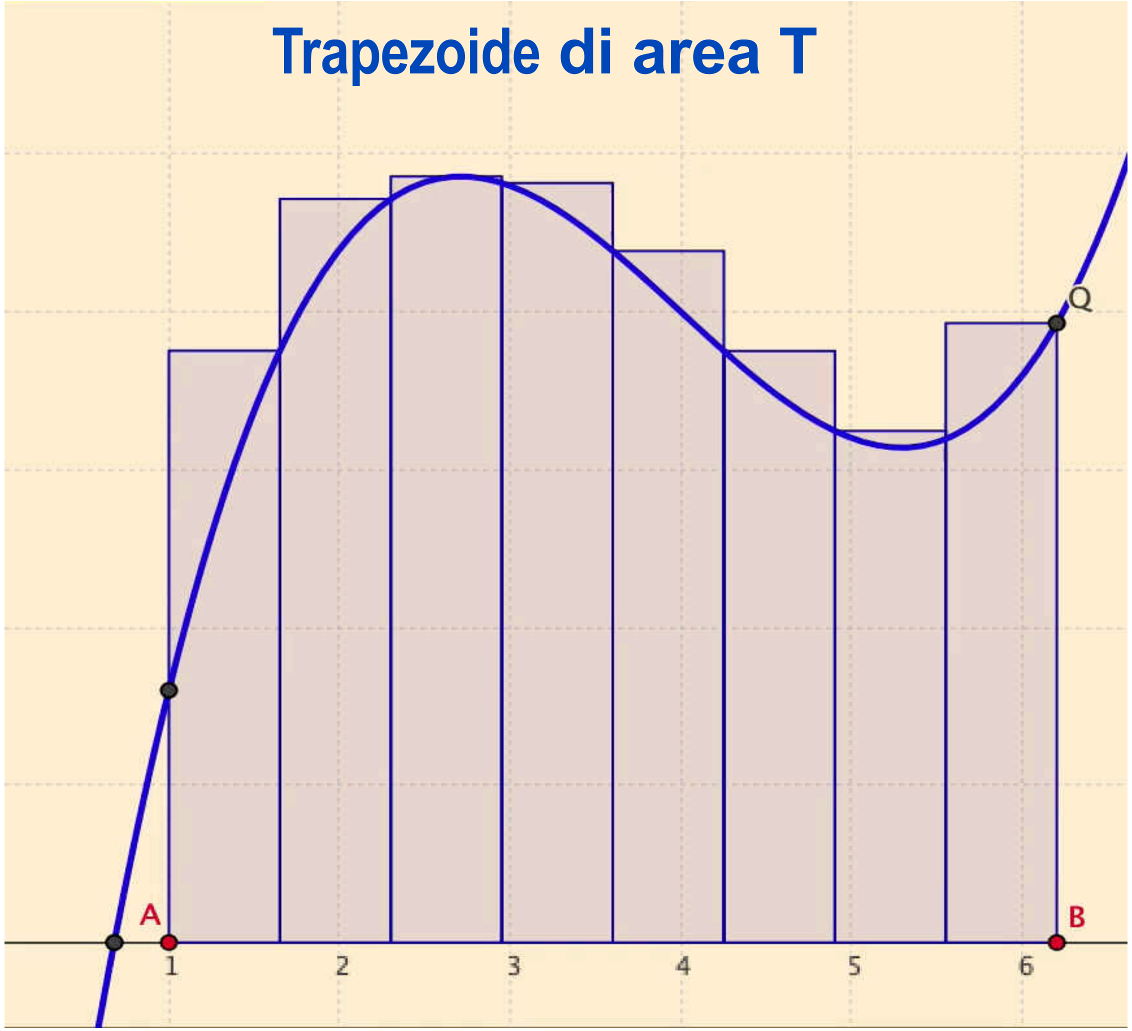


Qui i rettangoli sono 8 e la formula diventa:

$$T \cong \sum_{i=1}^{8} f(x_i)\Delta x$$

Miglioro ancora di più l’approssimazione

7. **Aumento ancora Il numero n dei rettangoli, così l’approssimazione migliora sempre più:**



$$T \cong \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Video

Claudio Gori Giorgi e Daniela Valenti 2023

L’area del trapezoide

8. Quando il numero n dei rettangoli tende all’infinito:

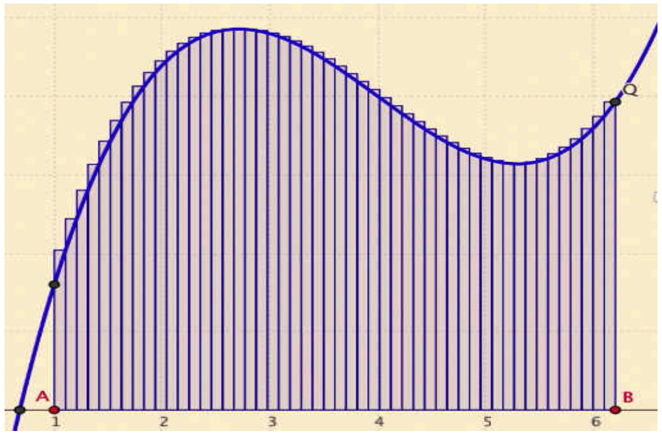
- **la somma delle aree tende all’area T del trapezoide;**
- **la sommatoria tende a una somma di infiniti addendi;**
- **le basi Δx dei rettangoli tendono a un infinitesimo dx;**
- **i valori $f(x_i)$ tendono ad $f(x)$.**

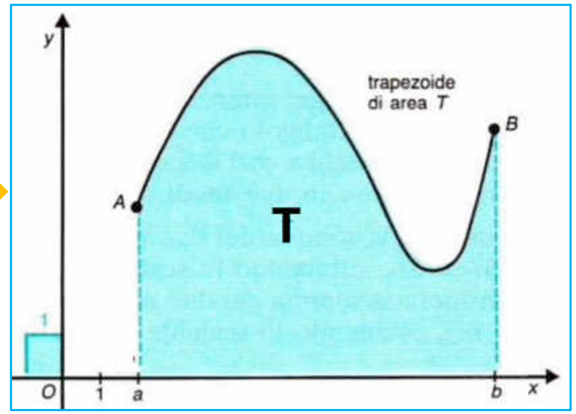
La formula

$$T \cong \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

diventa

$$T = \int_a^b f(x)dx$$





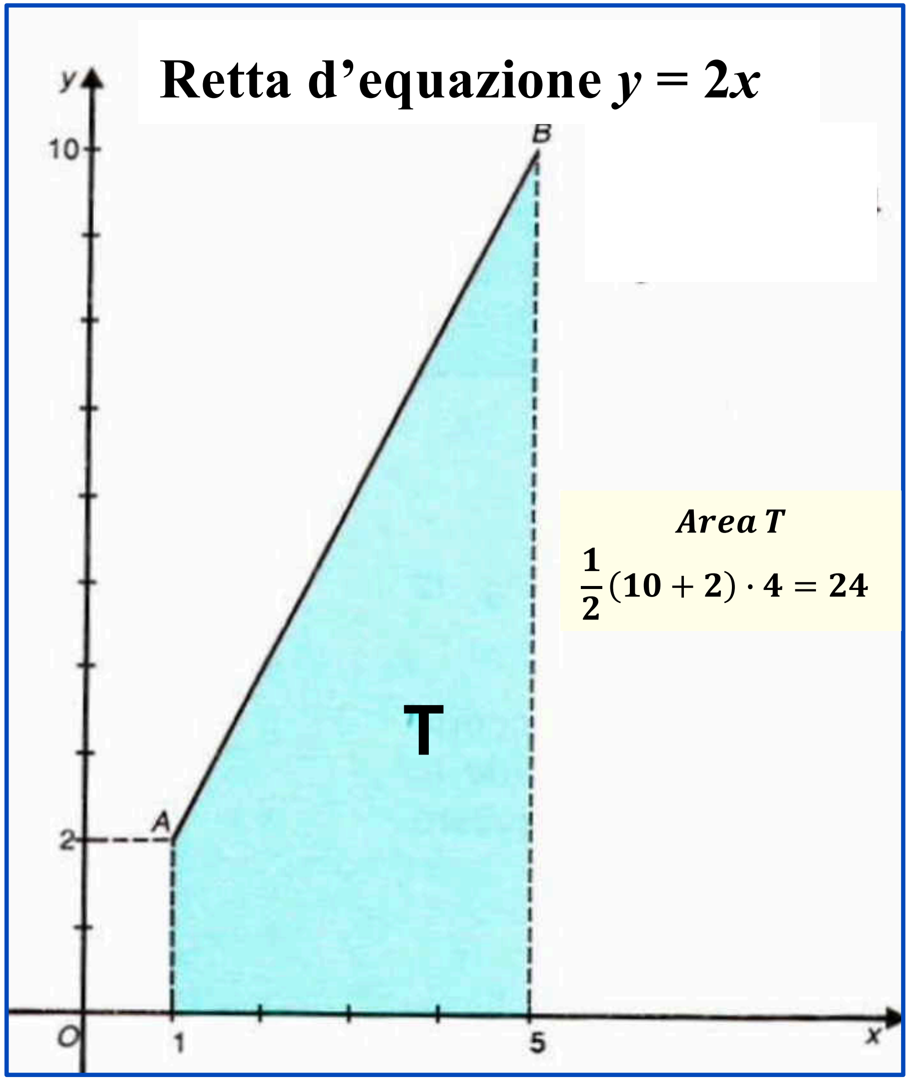
Simboli della matematica

$$T = \int_a^b f(x)dx$$

In questa scrittura:

- **il simbolo $\int$, una S allungata, ricorda la somma di infiniti termini;**
- **la scrittura si legge «integrale da *a* a *b* di *f(x)* in *dx*»;**
- ***a* e *b* sono gli estremi d'integrazione e ricordano l'intervallo $[a, b]$ che viene suddiviso in infiniti intervallini di ampiezza *dx*;**
- ***f(x)* è la funzione integranda.**

Il simbolo di integrale



Esempio

Funzione integranda:

$$y = 2x$$

Estremi d'integrazione:

$$a = 1 \quad b = 5$$

Integrale da calcolare:

$$\int_1^5 2x\,dx$$

La figura è un trapezio di area T = 24, quindi scrivo:

$$\int_1^5 2x\,dx = 24$$

Una variabile muta

La scrittura

$$\int_1^5 2x\,dx = 24$$

indica un numero e non dipende da x.
Perciò posso usare al posto di x ogni altra lettera, ad esempio t o z e il risultato non cambia.
In generale, posso indicare la variabile d'integrazione con qualsiasi lettera e scrivere:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz = T$$

Si dice che x (o t o z) è una variabile muta, perché il risultato del calcolo non dipende dal suo valore.

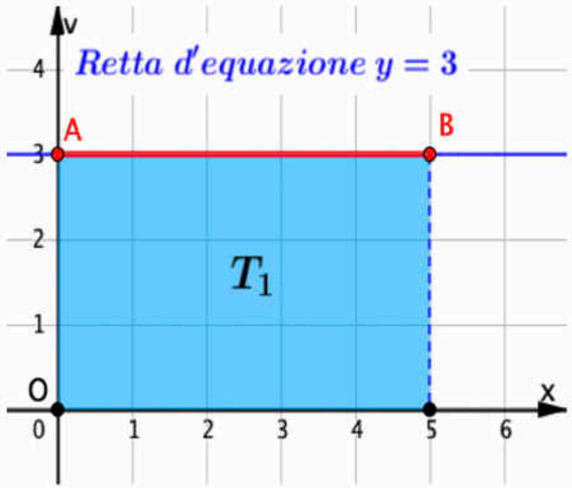
Attività

Completa la scheda per cominciare a lavorare con il simbolo di integrale

Riflessioni sull’attività svolta

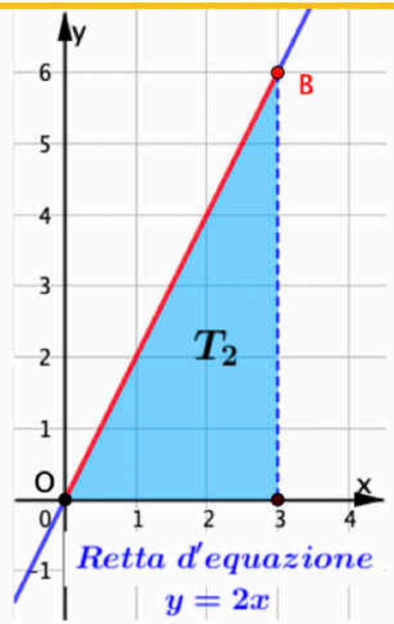
Quesito 1

1. Completa la tabella seguente



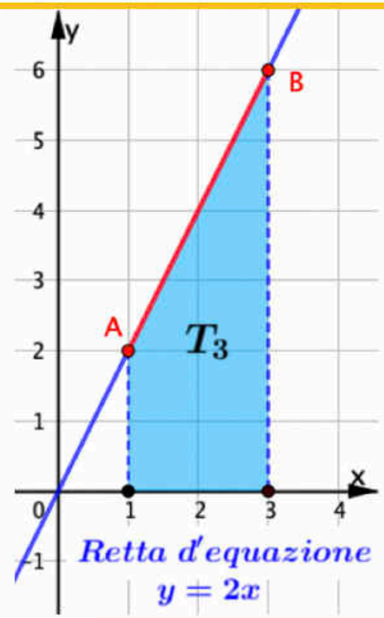
Area T_1 = $5 \times 3 = 15$

$$\int_0^5 3dx = 15$$



Area T_2 = $3 \times 6 : 2 = 9$

$$\int_0^3 2x\,dx = 9$$



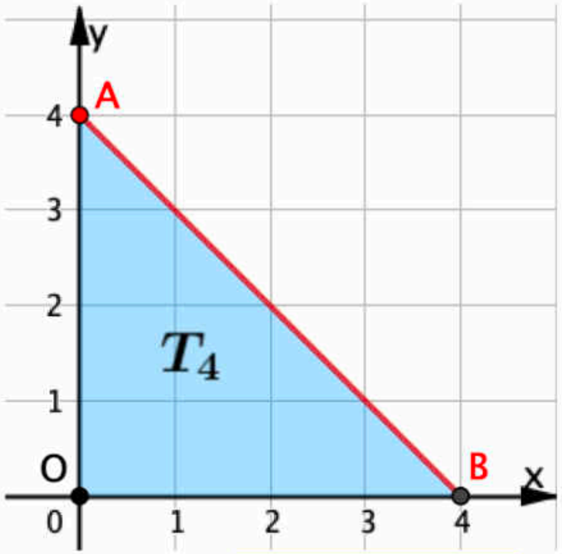
Area T_3 = $(2 + 6) \times 2 : 2 = 8$

$$\int_1^3 2x\,dx = 8$$

Claudio Gori Giorgi e Daniela Valenti 2023

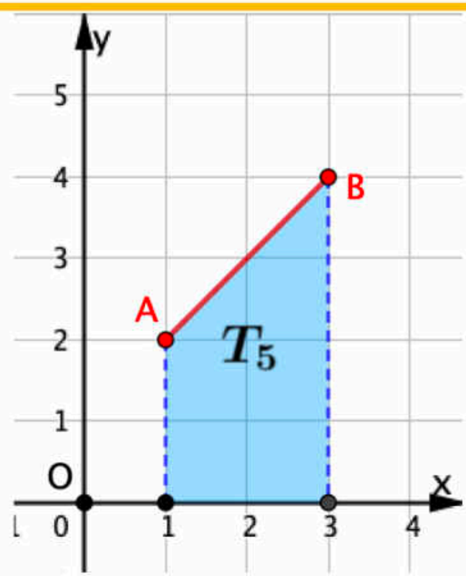
Quesito 2

2. Completa la tabella seguente



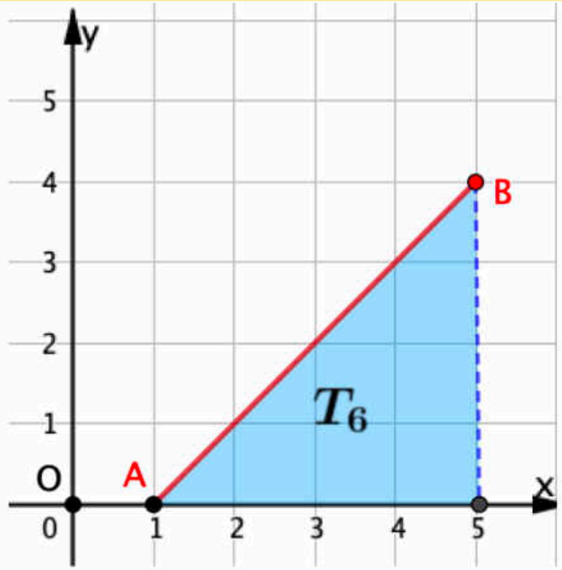
Area T_4 = $4 \times 4 : 2 = 8$

$$\int_0^4 (4-x)dx = 8$$



Area T_5 = $(2 + 4) \times 2 : 2 = 6$

$$\int_1^3 (x+1)dx = 6$$

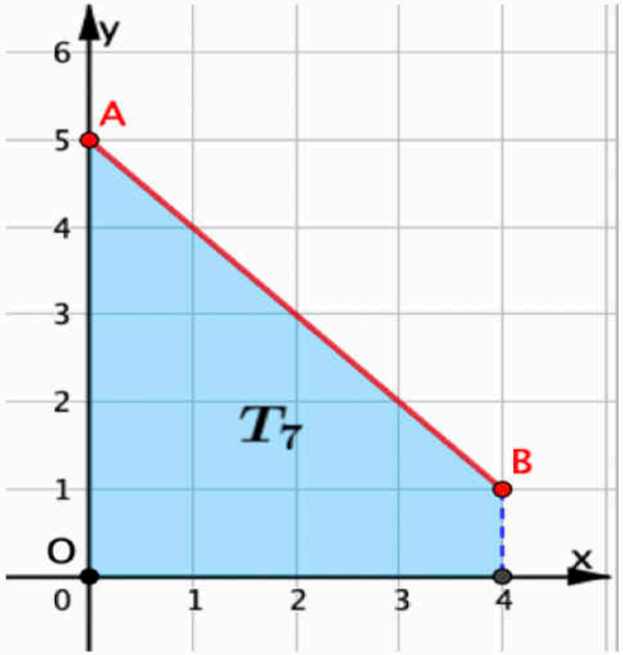


Area T_6 = $5 \times 4 : 2 = 10$

$$\int_1^5 (x-1)dx = 10$$

Quesito 3

3. Qui sotto trovi a sinistra l'area T_7 e a destra quattro integrali. Quale integrale descrive l'area T_7?



A. $\int_0^4 (4-x)dx = 12$

B. $\int_0^5 (4-x)dx = 12$

C. $\int_0^4 (5-x)dx = 12$

D. $\int_0^4 (5-x)dx = 10$