

Algebra delle derivate I. Esercizi

Richiamo le derivate di funzioni elementari

Funzione	Derivata
$y = k$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
$y = \sin(x)$	$y' = \cos(x)$
$y = \cos(x)$	$y' = -\sin(x)$
$y = e^x$	$y' = e^x$

Derivata della somma di funzioni derivabili

1. Calcola le derivate delle funzioni assegnate per completare la seguente tabella

Funzione	Derivata	Procedimento
$y = x^4 + x^3$		$y = f(x) + g(x)$ ha per derivata $y' = f'(x) + g'(x)$
$y = x^2 + e^x$		
$y = x + \sin(x)$		
$y = \cos(x) + e^x$		
$y = \cos(x) + \sin(x)$		
$y = x + \ln(x)$		
$y = x^2 + 4$		$y = f(x) + k$ ha per derivata $y' = f'(x)$
$y = \sin(x) + \sqrt{3}$		
$y = \cos(x) + \frac{3}{4}$		

2. Completa il seguente procedimento per calcolare la derivata della somma di tre funzioni derivabili.

Esempio	In generale
$y = x^2 + \text{sen}(x) + \text{cos}(x)$	$y = f(x) + g(x) + h(x)$
<i>Applico la proprietà associativa</i>	
$y = x^2 + [\text{sen}(x) + \text{cos}(x)]$	$y = f(x) + [\dots\dots\dots]$
<i>Derivo la somma di due funzioni</i>	
$y' = 2x + [\dots\dots\dots]$	$y' = f'(x) + [\dots\dots\dots]$

L'esercizio suggerisce una regola generale: per derivare la somma di funzioni addiziono le derivate delle singole funzioni

3. Calcola le derivate delle funzioni assegnate per completare la seguente tabella.

Funzione	Derivata
$y = x + x^2 + \text{sen}(x)$	
$y = \text{sen}(x) + \text{cos}(x) + e^x + 5$	
$y = \text{cos}(x) + x^3 + x^4 + \sqrt{2}$	

Derivata del prodotto di funzioni derivabili

4. Calcola le derivate delle funzioni assegnate per completare la seguente tabella

Funzione	Derivata	Procedimento
$y = x^4 \text{sen}(x)$		$y = f(x) \cdot g(x)$ ha per derivata $y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$y = x^2 e^x$		
$y = x^3 \text{cos}(x)$		
$y = e^x \text{cos}(x)$		
$y = \text{sen}(x) \text{cos}(x)$		
$y = 4x^2$		$y = k f(x)$ ha per derivata $y' = k f'(x)$
$y = 2\text{sen}(x)$		
$y = \frac{3}{4} \text{cos}(x)$		

5. Calcola le derivate delle funzioni assegnate per completare la seguente tabella

Funzione	Derivata	Procedimento
$y = -x^4$		$y = k f(x)$ ha per derivata $y' = k f'(x)$ Con $k = -1$ ottengo $y = -f(x)$ ha per derivata $y' = -f'(x)$
$y = -e^x$		
$y = -\text{sen}(x)$		
$y = -\text{cos}(x)$		

6. Completa il seguente procedimento per calcolare la derivata del prodotto di tre funzioni derivabili.

Esempio

$$y = x^3 \cdot \text{sen}(x) \cdot \text{cos}(x)$$

Applico la proprietà associativa e considero la funzione prodotto di due funzioni

$$y = x^3 \cdot [\text{sen}(x) \cdot \text{cos}(x)]$$

Derivo il prodotto di due funzioni

$$y' = 3x^2 \cdot [\dots\dots\dots] + x^3 \cdot [\dots\dots\dots]' =$$

$$= 3x^2 \cdot [\dots\dots\dots] + x^3 \cdot [\dots\dots\dots + \dots\dots\dots] =$$

$$= 3x^2 \cdot \text{sen}(x) \cdot \text{cos}(x) + x^3 \cdot \text{cos}(x) \cdot \text{cos}(x) + x^3 \cdot \text{sen}(x) \cdot [-\text{cos}(x)]$$

L'esercizio 6 suggerisce una regola generale: per derivare il prodotto di n funzioni addiziono n termini che si ottengono dal prodotto stesso sostituendo al primo, al secondo, ... all'n-mo fattore la corrispondente derivata.

7. Calcola le derivate delle funzioni assegnate per completare la seguente tabella.

Funzione	Derivata
$y = 4x^2 \text{sen}(x)$	
$y = x^3 \cdot e^x \cdot \text{cos}(x)$	
$y = -x^2 \text{sen}(x)$	

Derivata di somme e prodotti di funzioni derivabili

8. Calcola le derivate delle funzioni assegnate per completare la seguente tabella

Funzione	Derivata
$y = \text{sen}(x) - \text{cos}(x) =$ $= \text{sen}(x) + [-\text{cos}(x)]$	$y' = \text{cos}(x) + \dots\dots\dots$
$y = 4 - 3x^2$	
$y = e^x - 2\text{sen}(x)$	
$y = 2\text{cos}(x) - e^x$	

Calcola le derivate delle funzioni assegnate negli esercizi da 9 a 15

9. $y=2x-3$, $y=-\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}$, $y=\sqrt{2x}+\sqrt{3}$.

10. $y=x^2-x$, $y=-2x^2+3x$, $y=3x^2-5x$.

11. $y=x^4-x^2+x-5$, $y=-4x^5+5x^4-10x^2+20$, $y=\frac{3}{4}x^4-\frac{5}{2}x^2+3x-5$.

12. $y=-x^6+2x^3-6$, $y=x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2+\sqrt{3}$, $y=\frac{4}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2+x-\sqrt{5}$.

13. Scrivere la derivata di un polinomio, cioè di una funzione del tipo
 $y=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$.

14. $y=(x+1)(x-1)$, $y=(x^2+2)(x^2-2)$, $y=(x-1)(x^2+x+1)$
In quanti modi si può organizzare il calcolo di queste derivate?
Qual'è il procedimento più rapido?

15. $y=(2x^2+x)(2x^2-x)$, $y=(x^3+1)(x^3-1)$, $y=x^3(-4x^2+2x-3)$
In quanti modi si può organizzare il calcolo di queste derivate?
Qual'è il procedimento più rapido?

16. $y = 2 \operatorname{sen}(x) - 3 \cos(x) + \sqrt{2}$

$y = \sqrt{2} \cos(x) - \cos(x) - 1$

17. $y = (2x^3 + x)\operatorname{sen}(x)$

$y = (x^2 - 4x)\cos(x)$

18. $y = (3x^4 - 2x)e^x$

$y = (2x^5 + 7)e^x$

19. $y = [2\operatorname{sen}(x) - 3]e^x$

$y = [2\operatorname{sen}(x) - \cos(x)]e^x$

20. $y = 2\operatorname{sen}(x)(e^x + 4)$

$y = [e^x - \cos(x)]\operatorname{sen}(x)$